

ΙΟΥΝΙΟΣ 2000 ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1

A). α). Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x) = f'(x) + g'(x)$. Μονάδες 8

β). Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$c \cdot f(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$, με $g(x) \neq 0$, όπου c πραγματική σταθερά. Μονάδες 4,5

B). α). Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 8

Στήλη A Συνάρτηση	Στήλη B πρώτη παράγωγος
α). $x^2 + 3$	1). $1 - \eta \mu x$
β). $x + \sigma \upsilon \nu x$	2). $3 \cdot x^2 - 8 \cdot x$
γ). $x \cdot \eta \mu x$	3). $2 \cdot x + 3$
δ). $x^3 - 4 \cdot x^2$	4). $\eta \mu x - x \cdot \sigma \upsilon \nu x$
	5). $2 \cdot x$
	6). $3 \cdot x^2 - 4 \cdot x$
	7). $\eta \mu x + x \cdot \sigma \upsilon \nu x$

β). Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \neq 0$ είναι:

[A]. e^x , [B]. $\frac{e^x - x \cdot e^x}{x^2}$, [Γ]. $\frac{e^x \cdot x + e^x}{x^2}$, [Δ]. $\frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2}$, [E]. $\frac{x \cdot e^x - e^x}{x}$

Μονάδες 4,5

ΛΥΣΗ

A). α). Θεωρία, β). Θεωρία

B). α). $\alpha \rightarrow 5, \beta \rightarrow 1, \gamma \rightarrow 7, \delta \rightarrow 2$. β). Δ

ΘΕΜΑ 2

A). Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής X σωστά συμπληρωμένο.

Τιμές Μεταβλητής	Συχνό- τητα	Σχετική Συχνό- τητα	Σχετική Συχνό- τητα	Αθροιστική Συχνότητα			
x_i	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	$x_i \cdot v_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot v_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
ΣΥΝΟΛΟ	$v=50$	1	100				

Μονάδες 16

B). Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Μονάδες 4

Γ). Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι $s^2 = 0,49$. Δίνεται ότι: $S^2 = \frac{1}{v} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\}$

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

A). από τον πίνακα έχουμε ότι : $v_1 = 10$, $N_2 = 35$, $x_1 \cdot v_1 = 10$, $x_1^2 = 1$, $x_2^2 = 4$, $x_3^2 = 9$, $x_1^2 \cdot v_1 = 10$.

Όμως $N_2 = v_1 + v_2 \Leftrightarrow 35 = 10 + v_2 \Leftrightarrow v_2 = 25$.

Επειδή είναι : $v = 50 \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 50 \Leftrightarrow 10 + 25 + v_3 = 50 \Leftrightarrow v_3 = 15$.

Επομένως : $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{10}{50} = 0,2$, $f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{25}{50} = 0,5$ και $f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{15}{50} = 0,3$.

Ακόμα : $v_1 = N_1 = 10$ και $v = N_3 = 50$.

Επιπλέον : $x_2 \cdot v_2 = 2 \cdot 25 = 50$, $x_3 \cdot v_3 = 3 \cdot 15 = 45$ και $\sum_{i=1}^3 x_i \cdot v_i = 10 + 50 + 45 = 105$.

Τέλος έχουμε : $x_2^2 \cdot v_2 = 2^2 \cdot 25 = 100$, $x_3^2 \cdot v_3 = 3^2 \cdot 15 = 135$ και $\sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot v_i = 10 + 100 + 135 = 245$.

Επομένως ο πίνακας γίνεται :

Τιμές Μεταβλητής	Συχνό- τητα	Σχετική Συχνό- τητα	Σχετική Συχνό- τητα	Αθροιστική Συχνότητα			
x_i	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	$x_i \cdot v_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot v_i$
1	10	0,2	20	10	10	1	10
2	25	0,5	50	35	50	4	100
3	25	0,3	30	30	45	9	135
ΣΥΝΟΛΟ	$v=50$	1	100		105		245

B). έχουμε ότι : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i \cdot v_i}{v} = \frac{105}{50} = 2,1$. Και ότι η εικοστή και εικοστή πρώτη παρατήρηση είναι 2

Άρα έχουμε $\delta = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$.

$$\Gamma). S^2 = \frac{1}{v} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\} = \frac{1}{50} \cdot \left(245 - \frac{105^2}{50} \right) = \frac{1}{50} \left(245 - \frac{11025}{50} \right) = \frac{24,5}{50} = 0,49.$$

ΘΕΜΑ 3

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

A: να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς ; Μονάδες 8

B: να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς; Μονάδες 8

Γ: να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς; Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι οι 120 μαθητές του λυκείου, οπότε $N(\Omega) = 120$.

Έστω τα ενδεχόμενα :

A : «Ο μαθητής συμμετέχει στο διαγωνισμό της ΕΜΕ»

B : «Ο μαθητής συμμετέχει στο διαγωνισμό της ΕΕΦ».

Τότε : $A \cap B$: «Ο μαθητής συμμετέχει και στους δύο διαγωνισμούς».

Τότε : $P(A) = \frac{24}{120} = 0,2$ και $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,2 \Leftrightarrow P(A') = 0,8$ και

$P(B) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$ και $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(B') = \frac{5}{6}$ και $P(A \cap B) = \frac{12}{120} = 0,1$.

Το ενδεχόμενο να συμμετέχει σε έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς είναι $A \cup B$,

Οπότε : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{24}{120} + \frac{20}{120} - \frac{12}{120} = \frac{32}{120} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{4}{25}$.

Το ενδεχόμενο να συμμετέχει σ' έναν μόνο από τους δύο διαγωνισμούς είναι : $(A - B) \cup (B - A)$.

Άρα : $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) =$

$= P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B) = \frac{24}{120} + \frac{20}{120} - 2 \cdot \frac{12}{120} = \frac{20}{120} \Leftrightarrow P[(A - B) \cup (B - A)] = \frac{1}{6}$.

Τέλος το ενδεχόμενο να μην συμμετέχει σε κανέναν διαγωνισμό από τους δύο είναι : $(A \cup B)'$.

Άρα : $P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$.

ΘΕΜΑ 4

Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα : A). Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας ; Μονάδες 5	Χρόνια υπηρεσίας [-)	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$
	0- 5	10
	5-10	15
	10-15	12
	15-20	15
	20-25	18
	25-30	18
	30-35	12

B). Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

α). πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια;

Μονάδες 10

β). πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος;

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

A). από τον πίνακα φαίνεται ότι τουλάχιστον 15 έτη υπηρεσίας έχουν $15 + 18 + 18 = 63$ καθηγητές.

B). α). το συγκεκριμένο ερώτημα, με τον τρόπο που διατυπώνεται, επιδέχεται περισσότερες από μια απαντήσεις.

Λύση Α

Αν ακολουθήσουμε το σκεπτικό του σχολικού βιβλίου και υποθέσουμε (αν και δεν μας δίδεται) ότι η κατανομή είναι ομοιόμορφη, τότε στα επόμενα 12,5 έτη θα συνταξιοδοτηθούν όσοι έχουν υπηρεσία πάνω από 22,5 έτη. Τα 22,5 έτη υπηρεσίας είναι το μέσο της κλάσης [20, 25), άρα θα έχουμε σχετική συχνότητα το μισό του 18, δηλαδή 9 καθηγητές (ομοιόμορφη κατανομή), επομένως $9 + 18 + 12 = 39$ εκπαιδευτικοί.

Λύση Β

Αφού η κατανομή δεν μας δίδεται ομοιόμορφη, δεν μπορούμε να δώσουμε ακριβή αριθμό, αλλά διάστημα για τα έτη υπηρεσίας. Τα επόμενα 12,5 έτη θα συνταξιοδοτηθούν όσοι έχουν πάνω από

22,5 έτη υπηρεσίας. Τα 22,5 έτη υπηρεσίας βρίσκονται μέσα στην κλάση $[20, 25)$, άρα μπορούμε να πούμε ότι θα συνταξιοδοτηθούν :

το λιγότερο $18 + 12 = 30$ και το περισσότερο $18 + 12 + 18 = 48$ εκπαιδευτικοί.

ΛΥΣΗ Γ

Χρόνια υπηρεσίας [-)	Σχετική Συχνότητα f_i %	Σχετ.Αθρ. Συχνότητα F_i %
0- 5	10	10
5-10	15	25
10-15	12	37
15-20	15	52
20-25	18	70
25-30	18	88
30-35	12	100

Έχουμε ότι $A(20, 52)$ και $B(25, 70)$.

Έστω $y = \alpha \cdot x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας AB. Τότε :

$$\begin{cases} 52 = 20\alpha + \beta \\ 70 = 25\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -20 \\ \alpha = 3,6 \end{cases}.$$

Επομένως η εξίσωση AB είναι :

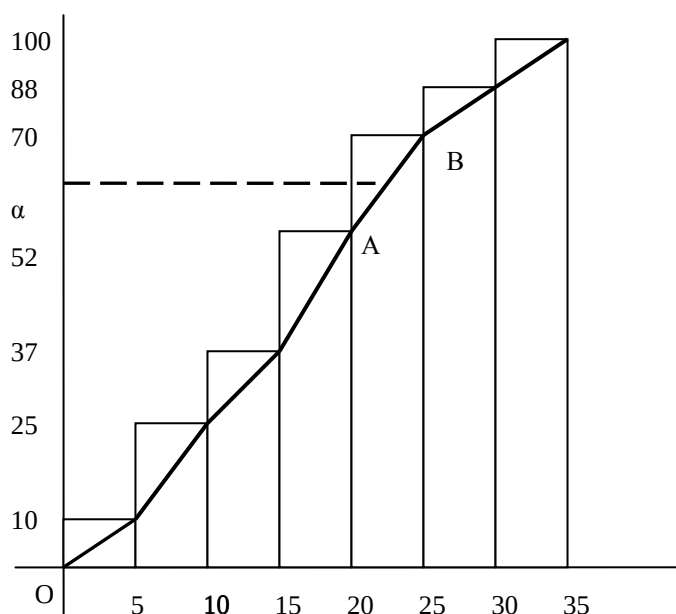
$$(AB) : y = 3,6 \cdot x - 20.$$

Για $x = 22,5$, έχουμε : $\alpha = 3,6 \cdot 22,5 - 20$

$$\Rightarrow \alpha = 61.$$

Συνεπώς θα πάρουν σύνταξη :

$$100 - 61 = 39 \text{ εκπαιδευτικοί.}$$



β). μέσα στα επόμενα χρόνια θα πάρουν σύνταξη οι εκπαιδευτικοί που έχουν υπηρεσία $[30, 35)$ άρα θα πρέπει να γίνουν 12 νέες προσλήψεις.

ΙΟΥΝΙΟΣ 2001 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1

A1). Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Μονάδες 8,5

A2). Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο, ($=, \leq, \geq$) έτσι ώστε να είναι αληθής:

α). $P(A') \dots 1 - P(A).$

Μονάδες 2

β). αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \dots P(A).$

Μονάδες 2

B1). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και A' το αντίθετο του ενδεχομένου A.

α). Αν $A' \subseteq B$ τότε $P(A) + P(B) < 1.$

β). Αν $P(A) = P(A')$ τότε $2 \cdot P(A) = P(\Omega).$

Μονάδες 4

B2). Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $A \subseteq B$, $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = \frac{5}{12}$ τότε η $P(A \cup B)$ είναι ίση με:

[Α]. $\frac{1}{4}$ [Β]. $\frac{5}{12}$ [Γ]. $\frac{2}{3}$ [Δ]. $\frac{1}{6}.$

Μονάδες 2,5

B3). Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης A και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης B, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού

χώρου Ω και ισχύει ότι $P(A) = \frac{1}{3},$

$$P(B) = \frac{1}{4} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{5}.$$

Στήλη A	Στήλη B
A). $P(A - B)$	1). $\frac{1}{20}$
B). $P((B - A'))$	2). $\frac{2}{15}$
Γ). $P[(A \cap B)']$	3). $\frac{4}{5}$
	4). $\frac{1}{12}$
	5). $\frac{19}{20}$

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

A1). Σχολικό βιβλίο σελίδα 152.

A2). α). $P(A') = 1 - P(A)$ β). Αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \geq P(A).$

B1). α). Λάθος β). Σωστό

B2). (β)

B3). $(\alpha) \rightarrow 2$ $(\beta) \rightarrow 5$ $(\gamma) \rightarrow 3.$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x + \eta \mu x.$

A). Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0.$

Μονάδες 8

B). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A (0,1).

Μονάδες 8

Γ). Να βρείτε την τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $\lambda \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$ Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

A). $f'(x) = -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, και $f''(x) = -\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.

Άρα $f(x) + f''(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0$.

B). $\lambda = f'(0) = -\eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu 0 = -0 + 1 = 1$. Το σημείο $A(1, 0)$ ανήκει στην ευθεία $y = \lambda \cdot x + \beta$,

Άρα $1 = 1 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$. Επομένως η εφαπτόμενη έχει εξίσωση $y = x + 1$.

$$\Gamma). f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = -1 + 0 = -1 \quad \text{και} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \eta\mu\frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1.$$

$$\text{Και } \lambda \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \lambda \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow \lambda = -4.$$

ΘΕΜΑ 3

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.	Βάρος σε κιλά [-)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
	45-55	0,2
	55-65	0,5
	65-75	
	75-85	

A). Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση. Μονάδες 8

B). Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων. Μονάδες 9

Γ). Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.

α). Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά. Μονάδες 4

β). Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών. Μονάδες 4

ΛΥΣΗ

A).

Βάρος σε κιλά [-)	x_i	ν_i	f_i	F_i	$x_i \cdot \nu_i$
45-55	50	16	0,2	0,2	800
55-65	60	24	0,3	0,5	1440
65-75	70	32	0,4	0,9	2240
75-85	80	8	0,1	1	640
Σύνολα	—	80	1	—	5120

$F_3 = 0,9$ και $F_4 = 1$.

$$B). \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{5120}{80} = 64.$$

Γ). α). $P(x < 65) = f_1 + f_2 = 0,2 + 0,3 = 0,5$.

β). $P(55 \leq x < 75) = f_2 + f_3 = 0,3 + 0,4 = 0,7$.

ΘΕΜΑ 4

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50 % περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16 % περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά.

Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

- A). Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους. Μονάδες 6
- B). Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Μονάδες 6
- Γ). Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά. Μονάδες 6
- Δ). Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV). Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

A). $\bar{x} = 12$ και $S = 2$.

B). $CV =$

$$\frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{2}{12} \cdot 100\% = 16,67\%,$$

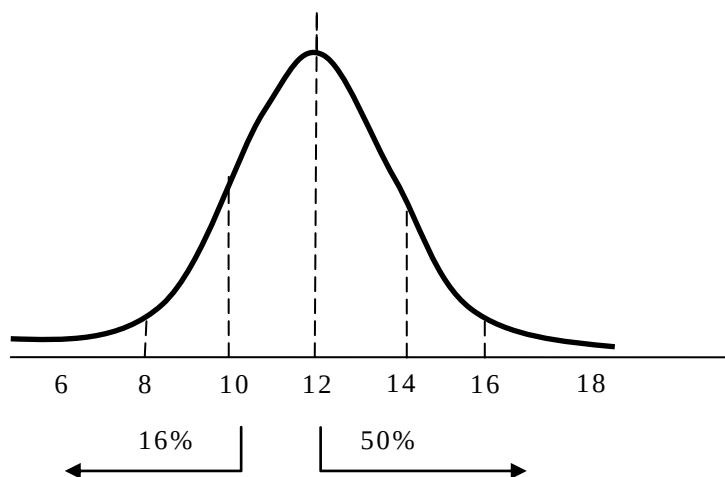
επειδή $CV > 10\%$, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ). από το 14 έως το 16 λεπτό κάνει

$$\text{το } \frac{95\% - 68\%}{2} = 13,5\% \text{ των}$$

μαθητών, δηλαδή $13,5\% \cdot 4.000 =$

$$\frac{13,5}{100} \cdot 4000 = 540 \text{ μαθητές.}$$



Δ). όταν ο μαθητής καθυστερεί κατά 5 λεπτά, η μέση τιμή αυξάνεται κατά 5 λεπτά και η τυπική απόκλιση παραμένει σταθερή.

Δηλαδή : $\bar{x}_1 = 12 + 5 = 17$ λεπτά και $S_1 = S = 2$ λεπτά.

$$CV_1 = \frac{S_1}{\bar{x}_1} \cdot 100\% = \frac{2}{17} \cdot 100\% = 11,76\% \text{ και } CV - CV_1 = 16,67\% - 11,76\% = 4,91\%.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΙΟΥΝΙΟΣ 2001– ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1

A1). Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , τότε να αποδείξετε ότι:
 $c \cdot f(x)' = c \cdot f'(x)$, όπου c πραγματικός αριθμός. Μονάδες 6,5

A2). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). $f(x) \cdot g(x)' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$

β). $f \cdot g(x)' = f' \cdot g(x) \cdot g'(x)$

γ). $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}, (g(x) \neq 0)$

δ). $x^p' = p \cdot x^{p-1}$, p ρητός, $x > 0$

ε). $\eta\mu x' = \sigma\upsilon\nu x$

στ). $\sigma\upsilon\nu x' = \eta\mu x$

Μονάδες 6

B1). Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 7,5

Στήλη Α Συνάρτηση f	Στήλη Β Πρώτη παράγωγος της f
α). $2 \cdot \sqrt{x} + \ln 2, x > 0$	1). $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}$
β). $\frac{\eta\mu x}{x}, x \neq 0$	2). $3 \cdot \sigma\upsilon\nu(3 \cdot x)$
γ). $\eta\mu(3 \cdot x)$	3). $\frac{\eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$
	4). $\frac{1}{\sqrt{x}}$
	5). $\frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$
	6). $-3 \cdot \sigma\upsilon\nu(3 \cdot x)$

B2). Αν $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-1)^4$ και $f'(a) = 27$, όπου a πραγματικός αριθμός, τότε να βρείτε την τιμή του a . Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

A1). Σχολικό βιβλίο σελίδα 30.

A2). α). Λάθος β). Σωστό γ). Λάθος δ). Σωστό ε). Σωστό στ). Λάθος

B1). (α) $\rightarrow 4$ (β) $\rightarrow 5$ (γ) $\rightarrow (2)$.

B2). $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-1)^4 \Rightarrow f'(x) = (x-1)^3$. Ισχύει $f'(a) = 27 \Rightarrow (a-1)^3 = 27 \Rightarrow a = 4$.

ΘΕΜΑ 2

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες των 20 πρώτων ημερών του Μαΐου σε βαθμούς Κελσίου (°C). Α). Αν γνωρίζουμε ότι η μέση θερμοκρασία των παραπάνω ημερών είναι 24,4 °C, τότε : α). να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24 °C και πόσες 25 °C β). να υπολογίσετε την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο.	Τιμές Θερμοκρασίας x_i	Πλήθος Ημερών v_i
	22	2
	23	4
	24	
	25	
	26	2
	27	3
Μονάδες 5		
Β). Αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι 24,5 °C, να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24 °C και πόσες 25 °C.		Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

$$Α). α). v_1 + v_2 + \dots + v_6 = 20 \Leftrightarrow 11 + v_3 + v_4 = 20 \Leftrightarrow v_3 + v_4 = 9 \Leftrightarrow v_4 = 9 - v_3 \quad (1)$$

$$\text{Ισχύει } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot v_i}{n} \Leftrightarrow 24,4 = \frac{22 \cdot 2 + 23 \cdot 4 + 24 \cdot v_3 + 25 \cdot (9 - v_3) + 26 \cdot 2 + 27 \cdot 3}{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 488 = 44 + 92 + 24 \cdot v_3 + 225 - 25 \cdot v_3 + 52 + 81 \Leftrightarrow 488 = 494 - v_3 \Leftrightarrow v_3 = 6.$$

Άρα 6 ημέρες είχαν θερμοκρασία 24 °C.

$$(1) \Rightarrow v_4 = 9 - v_3 \Rightarrow v_4 = 9 - 6 \Rightarrow v_4 = 3. \text{ Άρα 3 ημέρες είχαν θερμοκρασίας 25 °C.}$$

β).

Τιμές Θερμοκρασίας x_i	Πλήθος Ημερών v_i	N_i
22	2	2
23	4	6
24	6	12
25	3	15
26	2	17
27	3	20
Σύνολα	20	—

$$M_0 = 24$$

Από την στήλη N_i παρατηρούμε ότι αν γράψουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά οι δύο

μεσαίες παρατηρήσεις στις θέσεις 10^η και 11^η είναι 2. Άρα $\delta = \frac{24 + 24}{2} = 24.$

Β). Είναι $\delta = 24,5$ και αν γράψουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά οι δύο μεσαίες παρατηρήσεις στις θέσεις 10^η και 11^η είναι 24 και 25 αντίστοιχα.

Τότε $v_1 + v_2 + v_3 = 10 \Rightarrow 6 + v_3 = 10 \Rightarrow v_3 = 4$. Επομένως 4 ημέρες είχαν θερμοκρασία 24 °C.

Επίσης $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 20 \Rightarrow 15 + v_4 = 20 \Rightarrow v_4 = 5$.

Επομένως 5 ημέρες είχαν θερμοκρασία 25 °C.

ΘΕΜΑ 3

Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών μιας πτήσης κάποιας Αεροπορικής Εταιρείας είναι τουλάχιστον 11 κιλά αλλά μικρότερο από 26 κιλά. Γνωρίζουμε ότι 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 κιλά, το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 κιλά, 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 κιλά και 15 % των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 κιλά.

α). Να παρασταθούν τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων. Μονάδες 10

β). Κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 20 κιλών, διαφορετικά έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Να βρείτε τι ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσης αυτής έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Μονάδες 7

γ). Να βρεθούν οι γωνίες των αντιστοίχων κυκλικών τομέων του κυκλικού διαγράμματος σχετικών συχνοτήτων, για τα δεδομένα του προβλήματος. Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α).

Κλάσεις	v_i	N_i	$f_i \%$	$F_i \%$
[11, 14)	8	8	10	10
[14, 17)	16	24	20	30
[17, 20)	24	48	30	60
[20, 23)	20	68	25	85
[23, 26)	12	80	15	100
Σύνολα	80	—	100	—

β). $f_4 \% + f_5 \% = 25 \% + 15 \% = 40 \%$. Των επιβατών θα έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.

γ). $\alpha_1 = f_1 \cdot 360^\circ = 0,1 \cdot 360^\circ = 36^\circ$.

$\alpha_2 = f_2 \cdot 360^\circ = 0,2 \cdot 360^\circ = 72^\circ$.

$\alpha_3 = f_3 \cdot 360^\circ = 0,3 \cdot 360^\circ = 108^\circ$.

$\alpha_4 = f_4 \cdot 360^\circ = 0,25 \cdot 360^\circ = 90^\circ$.

$\alpha_5 = f_5 \cdot 360^\circ = 0,15 \cdot 360^\circ = 54^\circ$.

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα σχολείο με 400 μαθητές διδάσκονται η αγγλική και η γαλλική γλώσσα. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες. Από τους παραπάνω μαθητές 340 παρακολουθούν την αγγλική γλώσσα και 240 τη γαλλική γλώσσα.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω Α το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική γλώσσα και Γ να παρακολουθεί τη γαλλική γλώσσα.

α). Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Γ είναι ασυμβίβαστα. Μονάδες 5

β). Να αποδείξετε ότι: $P(\Gamma - A) \leq \frac{5}{3}$. Μονάδες 5

γ). Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο την αγγλική γλώσσα. Μονάδες 8

δ). Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μία μόνο ξένη γλώσσα από αυτές. Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α). $P(A) = \frac{340}{400} = \frac{17}{20}$, $P(B) = \frac{240}{400} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ και $P(A \cup \Gamma) = 1$.

Έστω ότι Α, Γ είναι ασυμβίβαστα. Ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος :

$$P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) \Rightarrow 1 = \frac{17}{20} + \frac{12}{20} \Leftrightarrow 1 = \frac{29}{20} \text{ άτοπο. Άρα τα } A, \Gamma \text{ είναι ασυμβίβαστα.}$$

$$\beta). 1^{\text{ος}} \text{ τρόπος : Είναι } \Gamma - A \subseteq \Gamma \Rightarrow P(\Gamma - A) \leq P(\Gamma) \Leftrightarrow P(\Gamma - A) \leq \frac{3}{5}.$$

$$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος : } P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(\Gamma \cap A) \Leftrightarrow 1 = \frac{17}{20} + \frac{12}{20} - P(A \cap \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap \Gamma) = \frac{9}{20}. \text{ Είναι } P(\Gamma - A) = P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = \frac{12}{20} - \frac{9}{20} = \frac{3}{20} < \frac{3}{5}.$$

$$\gamma). P(A - \Gamma) = P(A) - P(A \cap \Gamma) = \frac{17}{20} - \frac{9}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

$$\delta). 1^{\text{ος}} \text{ τρόπος : } P[(A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)] = P(A) + P(\Gamma) - 2 \cdot P(A \cap \Gamma) = \frac{17}{20} + \frac{12}{20} - 2 \cdot \frac{9}{20} = \frac{11}{20}.$$

$$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος : } P[(A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)] = P(A - \Gamma) + P(\Gamma - A) = \frac{8}{20} + \frac{3}{20} = \frac{11}{20}.$$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2002 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Α). Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.	
α). Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα v_i , που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , $i = 1, 2, \dots, k$;	
Μονάδες 3	
β). Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$;	Μονάδες 3
γ). Να αποδείξετε ότι:	
i). $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, k$	
ii). $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.	Μονάδες 4
Β1). Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	
	Μονάδες 8
Β2). α). Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A κάποιου δειγματικού χώρου Ω .	Μονάδες 5
β). Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:	
i). $P(\Omega)$ ii). $P(\emptyset)$.	Μονάδες 2

ΛΥΣΗ

Α). Σχολικό Βιβλίο σελ. 65.

Β1). Σχολικό Βιβλίο σελ. 150.

Β2). α). Σχολικό Βιβλίο σελ. 148. β). Σχολικό Βιβλίο σελ. 149.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.	
α). Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .	Μονάδες 4
β). Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.	Μονάδες 4
γ). Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f .	Μονάδες 7
δ). Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x + 5$.	Μονάδες 10

ΛΥΣΗα). Πρέπει $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Άρα $A = \mathbb{R} - \{-1\}$.β). $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x+1} = \frac{2 \cdot 3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.γ). $f'(x) = \left(\frac{2 \cdot x}{x+1} \right)' = \frac{2x \cdot (x+1)' - 2x \cdot x+1'}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$ δ). Πρέπει $f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x_0+1} = 2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0+1 = \pm 1 \Leftrightarrow \{x_0 = 0 \text{ ή } x_0 = -2\}$.→ Για $x_0 = 0$, $f(0) = 0$, άρα η ευθεία διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$. Επομένως $(\varepsilon_1) : y = 2 \cdot x$.→ Για $x_0 = -2$, $f(-2) = 4$, άρα η ευθεία διέρχεται από το $K(-2, 4)$, και είναι $(\varepsilon_2) : y = 2 \cdot x + \beta$.Επειδή διέρχεται από το σημείο K θα ισχύει : $4 = 2 \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow \beta = 8$.Επομένως $(\varepsilon_2) : y = 2 \cdot x + 8$.

ΘΕΜΑ 3

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε Ευρώ:
8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.

- α). Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή. Μονάδες 6
β). Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής. Μονάδες 6
γ). Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10 %, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής. Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

$$\alpha). \bar{x} = \frac{8+10+13+13+15+16+18+14+14+9}{10} = \frac{130}{10} = 13.$$

Ταξινομούμε το δείγμα : 8, 9, 10, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 18

$$\text{Επειδή } n = 10 \text{ άρτιος διάμεσος θα είναι : } \delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{13+14}{2} = 13,5, \text{ άρα } \delta = 13,5.$$

Επικρατούσα τιμή του δείγματος είναι : $M_0 = 13$, $M_0 = 14$ (δικόρυφη).

$$\beta). \text{Εύρος : } R = 18 - 8 = 10.$$

Διακύμανση είναι

$$S^2 = \frac{8-13^2 + 9-13^2 + 10-13^2 + 2 \cdot 13-13^2 + 2 \cdot 14-13^2 + 15-13^2 + 16-13^2 + 18-13^2}{10}$$

$$= \frac{25+16+9+2+4+9+25}{10} = \frac{90}{10} = 9. \text{ άρα η τυπική απόκλιση είναι } S = \sqrt{S^2} = 3.$$

$$CV_x = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{3}{13} = 0,23 \text{ ή περίπου } 23 \text{ \%}.$$

γ). Αν x_i οι τιμές πριν την έκπτωση, y_i μετά την έκπτωση, θα ισχύει :

$$y_i = x_i - 0,1 \cdot x_i = 0,9 \cdot x_i, i = 1, 2, \dots, 10.$$

Σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή θα ισχύουν : $\bar{y} = 0,9 \cdot \bar{x}$ και $S_y = |0,9| \cdot S_x = 0,9 \cdot S_x$.

$$\text{Άρα } CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{0,9 \cdot S_x}{0,9 \cdot \bar{x}} = CV_x, \text{ οπότε ο συντελεστής μεταβολής δεν μεταβάλλεται.}$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) + P(B) \neq 2 \cdot P(A \cap B)$.

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση: $f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3$, $x \in \mathbb{R}$.

α). Να δείξετε ότι $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$. Μονάδες 5

β). Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = \frac{P(A) + P(B)}{2}$. Μονάδες 13

γ). Εάν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι $f(P(A)) = f(P(B))$. Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

$$\alpha). P(A) + P(B) \neq 2 \cdot P(A \cap B) \quad (1)$$

Από προσθετικό νόμο πιθανοτήτων έχουμε : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

Οπότε από σχέση (1) $\Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) \neq 2 \cdot P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$.

β). $f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3$, $x \in \mathbb{R}$. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 3 \cdot (x - P(A \cup B))^2 \cdot (x - P(A \cap B))' - 3 \cdot (x - P(A \cap B))^2 \cdot (x - P(A \cup B))' =$$

$$= 3 \cdot (x - P(A \cup B))^2 - 3 \cdot (x - P(A \cap B))^2 = 3 \cdot [(x - P(A \cup B))^2 - (x - P(A \cap B))^2] =$$

$$= 3 \cdot [2 \cdot x - P(A \cup B) - P(A \cap B)] \cdot [P(A \cap B) - P(A \cup B)].$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot [2 \cdot x - P(A \cup B) - P(A \cap B)] \cdot [P(A \cap B) - P(A \cup B)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{2 \cdot x - P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0 \text{ ή } P(A \cap B) - P(A \cup B) = 0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot x = P(A \cup B) + P(A \cap B) \text{ ή } P(A \cap B) = P(A \cup B) \text{ απορρίπτεται } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot x = P(A) + P(B) \Leftrightarrow x = \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

Επειδή $A \cap B \subseteq A \cup B$ έχουμε $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$.

Όμως από ερώτημα (α) $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$ άρα $P(A \cap B) < P(A \cup B)$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (2 \cdot x - P(A \cup B) - P(A \cap B)) \cdot (P(A \cap B) - P(A \cup B)) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < \frac{P(A) + P(B)}{2}.$$

Άρα αν $x < \frac{P(A) + P(B)}{2} \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

και αν $x > \frac{P(A) + P(B)}{2} \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Και για $x = \frac{P(A) + P(B)}{2} \Leftrightarrow$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

γ). Τα A, B είναι ασυμβίβαστα, άρα : $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ και $P(A \cap B) = 0$.

$$f(P(A)) = (P(A) - P(A \cup B))^3 - (P(A) - P(A \cap B))^3 = (P(A) - P(A) - P(B))^3 - (P(A))^3 =$$

$$= -(P(B))^3 - (P(A))^3.$$

$$f(P(B)) = (P(B) - P(A \cup B))^3 - (P(B) - P(A \cap B))^3 = (P(B) - P(A) - P(B))^3 - (P(B))^3 =$$

$$= -(P(A))^3 - (P(B))^3.$$

Άρα $f(P(A)) = f(P(B))$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΙΟΥΛΙΟΣ 2002 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1

A1). Πότε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;	Μονάδες 4
A2). Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και πότε γνησίως φθίνουσα;	Μονάδες 4
A3). Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$.	Μονάδες 10
B1). Σε μια κατανομή συχνοτήτων οι τιμές της μεταβλητής είναι $x_1, x_2, \dots, x_k$ με συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ αντίστοιχα και n είναι το πλήθος των παρατηρήσεων. Πώς ορίζεται η μέση τιμή $\bar{x}$;	Μονάδες 4
B2). Να γράψετε στο τετράδιό σας το κείμενο που ακολουθεί συμπληρώνοντας τα υπάρχοντα κενά. Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \dots, x_n$ ενός συνόλου δεδομένων δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \dots, w_n$ τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον μέσο ή μέσο που βρίσκεται από τον τύπο $\bar{x} = \dots\dots\dots$.	Μονάδες 3

ΛΥΣΗ

A1). Σχολικό βιβλίο σελίδα 16.

A2). Σχολικό βιβλίο σελίδα 13.

A3). Σχολικό βιβλίο σελίδα 28.

B1). Σχολικό βιβλίο σελίδα 85.

B2). Σταθμισμένο αριθμητικό μέσο, σταθμικό μέσο, $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot w_i}{\sum w_i}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot x \cdot (2 - x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.	
A). Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο Σημείο της $O(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .	Μονάδες 10
B). Για $\alpha = 1/2$, να βρείτε:	
α). την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(1, f(1))$.	Μονάδες 5
β). τα ακρότατα της συνάρτησης f .	Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

A). $f(x) = \alpha \cdot x \cdot (2 - x) = 2 \cdot \alpha \cdot x - \alpha \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \alpha - 2 \cdot \alpha \cdot x$.Η εφαπτόμενη της C_f στο $O(0, 0)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° , άρα $f'(0) = \tan 45^\circ = 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2 \cdot \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.B). Για $\alpha = \frac{1}{2}$, είναι $f(x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2$ και $f'(x) = 1 - x$.α). $x_0 = 1, y_0 = f(1) = \frac{1}{2}$ και $\lambda = f'(1) = 0, (\epsilon) : y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = 0 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$.β). $f'(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

x	$-\infty$
1	
$+\infty$	f

$f'(x)$	+
–	$f(x)$
Τοπικό μέγιστο	
$f(1) = \frac{1}{2}$	
$-\infty$	1
$+\infty$	f
$f'(x)$	+
–	$f(x)$
Τοπικό μέγιστο	
$f(1) = \frac{1}{2}$	
$f'(x)$	
+	
–	$f(x)$
Τοπικό μέγιστο	
$f(1) = \frac{1}{2}$	
$f'(x)$	
+	
–	$f(x)$
Τοπικό μέγιστο	
$f(1) = \frac{1}{2}$	
+	
–	$f(x)$
Τοπικό μέγιστο	
$f(1) = \frac{1}{2}$	
$\gg$	
–	$f(x)$
Τοπικό μέγιστο	

$$f(1) = \frac{1}{2}.$$

$$f(x)$$



Τοπικό
μέγιστο

$$f(1) = \frac{1}{2}.$$

Τοπικό
μέγιστο

$$f(1) = \frac{1}{2}.$$

Τοπικό
μέγιστο

$$f(1) = \frac{1}{2}.$$

Τοπικό
μέγιστο

$$f(1) = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 3

Στο
διπλανό
σχήμα
δίνεται το
πολύγωνο
αθροιστικ
ών
σχετικών
συχνότητ
ων, που
παρουσιά
ζει τη
βαθμολογ
ία μίας
ομάδας
μαθητών
στο
μάθημα
της
Ιστορίας.
Η
βαθμολογ
ία

κυμαίνεται
από 10
μέχρι 20.
Δίνεται
ότι 10
μαθητές
έχουν
βαθμό
μεγαλύτε-
ρο ή ίσο
του 12
και
μικρότερ-
ο του 14.

α). Να
αποδείξε-
τε ότι ο
αριθμός
των
μαθητών
είναι 50.

Μονάδες

8 β).

Να βρείτε
τη
διάμεσο.

Μονάδες

5

β). Να
βρείτε τη
διάμεσο.

Μονάδες

5

β). Να
βρείτε τη
διάμεσο.

Μονάδες

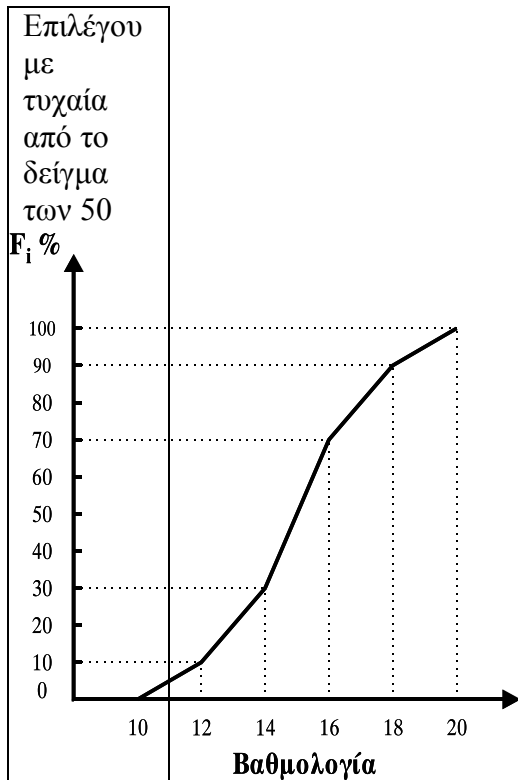
5

γ). Να
κατασκευ-
άσετε το
ιστόγραμ-
μα
συχνότη-
των.

Μονάδες

7

δ).



μαθητών
ένα
μαθητή.
Να βρείτε
την
πιθανότητ
α

ο
μαθητής
να έχει
βαθμό
μεγαλύτε
ρο ή ίσο
του

16.

Μονάδες

5 Λ

ΥΣΗ

ΛΥΣ

Η

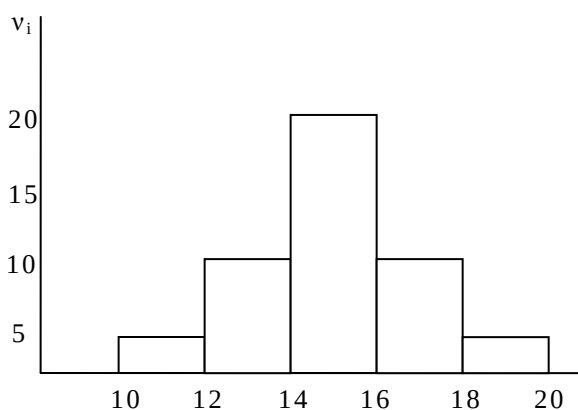
ΛΥΣΗ

α). $f_2 \% = F_2 \% - F_1 \% = 30 \% - 10 \% = 20 \%$, άρα $f_2 = 0,2 \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu} = 0,2 \Rightarrow \frac{10}{\nu} = \frac{1}{5} \Rightarrow \nu = 50$.

β). γραφικά $\delta = 15$.

γ).

Κλάσεις	$F_i \%$	$f_i \%$	v_i
[10, 12)	10	10	5
[12, 14)	30	20	10
[14, 16)	70	40	20
[16, 18)	90	20	10
[18, 20)	100	10	5
Σύνολα	—	100	50



δ). $P(A) = f_4 \% + f_5 \% = 20 \% + 10 \% = 30 \%$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 6\}$ δειγματικός χώρος.

A). Να δικαιολογήσετε ποιοι από τους παρακάτω τύπους μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλοι και ποιοι όχι για να εκφράσουν την πιθανότητα κάθε στοιχειώδους ενδεχομένου k του Ω .

i). $P(k) = \frac{1}{k}$ ii). $P(k) = \frac{1}{2^k}$ iii). $P(k) = \frac{1}{2 \cdot k}$.

Μονάδες 8

B). Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι οι ακόλουθες: 1, 1, 7, k , k , 3, 3, 3

όπου k είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο του Ω , με πιθανότητα $P(k) = \frac{1}{2 \cdot k}$.

Δίνονται τα ενδεχόμενα A , B του δειγματικού χώρου Ω ,

όπου $A = \{k \in \Omega : \text{η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής } X \text{ είναι } M_0 = 3\}$

και $B = \{k \in \Omega : \text{η μέση τιμή } \bar{x} = 2,5\}$.

α). Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα A και B .

Μονάδες 8

β). Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(A \cup B)$.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

A). i). $P(1) + P(2) + P(3) + P(6) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2 > 1$ άτοπο.

ii). $P(1) + P(2) + P(3) + P(6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{57}{64} < 1$ άτοπο.

iii). $P(1) + P(2) + P(3) + P(6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$ δεκτό.

B). α). Αν $k = 1$, τότε η τιμή με την μεγαλύτερη συχνότητα είναι η 1.

Αν $k = 2$, τότε η τιμή με την μεγαλύτερη συχνότητα είναι η 3.

Αν $k = 3$, τότε η τιμή με την μεγαλύτερη συχνότητα είναι η 3.

Αν $k = 6$, τότε η τιμή με την μεγαλύτερη συχνότητα είναι η 3.

Επομένως $A = \{2, 3, 6\}$.

$$\bar{x} = \frac{1+1+7+\kappa+\kappa+3+3+3}{8} \Rightarrow 2,5 = \frac{2 \cdot \kappa + 18}{8} \Rightarrow 2 \cdot \kappa + 18 = 20 \Rightarrow \kappa = 1. \text{ Άρα } B = \{1\}.$$

$$\beta). P(A) = P(2) + P(3) + P(6) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}. P(B) = P(1) = \frac{1}{2}, A \cup B = \Omega, \text{ άρα } P(A \cup B) = 1.$$

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2003 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΘΕΜΑ 1

- A). Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$. Μονάδες 8
- B). Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα; Μονάδες 6
- Γ). Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων. Μονάδες 6
- Δ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- [α]. Το εύρος είναι μέτρο θέσης.
- [β]. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.
- [γ]. Ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
- [δ]. Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$.
- [ε]. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών. Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

A). Θεωρία βιβλίου σελ. 28.

B). Θεωρία βιβλίου σελ. 13.

Γ). Θεωρία βιβλίου σελ. 87, 88.

Δ). α). λάθος β). λάθος γ). σωστό δ). σωστό ε). λάθος.

ΘΕΜΑ 2

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40 % των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30 % είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

α). γυναίκα ή φιλόλογος.

Μονάδες 5

β). γυναίκα και όχι φιλόλογος.

Μονάδες 5

γ). άνδρας και φιλόλογος.

Μονάδες 7

δ). άνδρας ή φιλόλογος.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

$$P(\Gamma) = 0,55, P(\Phi) = 0,40, P(\Gamma \cap \Phi) = 0,30.$$

$$\alpha). P(\Gamma \cup \Phi) = P(\Gamma) + P(\Phi) - P(\Gamma \cap \Phi) = 0,55 + 0,40 - 0,30 = 0,65.$$

$$\beta). P(\Gamma - \Phi) = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap \Phi) = 0,55 - 0,30 = 0,25.$$

$$\gamma). P(\Phi \cap A) = (\text{όμως } A = \Gamma')$$

$$P(\Phi \cap \Gamma') = P(\Phi - \Gamma) = P(\Phi) - P(\Gamma \cap \Phi) = 0,40 - 0,30$$

$$\delta). \text{Είναι } P(A) = P(\Gamma') = 1 - P(\Gamma) = 1 - 0,55 = 0,45.$$

$$\text{Άρα } P(A \cup \Phi) = P(\Phi) + P(A) - P(\Phi \cap A) = 0,40 + 0,45 - 0,10 = 0,75.$$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

A). Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

[α]. $\mathbb{R}$ [β]. $(-1, 1)$ [γ]. $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ [δ]. $(1, +\infty)$

Μονάδες 5

B). Να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

Γ). Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} [x - 1 \cdot f(x)]$.

Μονάδες 6

Δ). Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

A).γ.

$$B). f'(x) = \frac{x'x^2 - 1 - x \cdot x^2 - 1}{x^2 - 1^2} = \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$\Gamma). \lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot \frac{x}{x^2 - 1}] = \lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot \frac{x}{(x+1)(x-1)}] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta). \text{εφω} = f'(0) = \frac{-0^2 - 1}{(0^2 - 1)^2} = \frac{-1}{1} = -1. \text{ Άρα } \omega = \frac{3\pi}{4}.$$

ΘΕΜΑ 4

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα A) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα B) ενός Γυμνασίου.

α). Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των

Ομάδα A	Ομάδα B
1	7
8	14
9	6
5	4

παρατηρήσεων κάθε ομάδας.	Μονάδες 6	3	12
β). Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.	Μονάδες 5	4	5
γ). Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20 % και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;	Μονάδες 8		
δ). Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.	Μονάδες 6		

ΛΥΣΗ

$$\alpha). \bar{x}_A = \frac{1+8++5+3+4}{6} = \frac{30}{6} = 5 \text{ €}, \quad \bar{x}_B = \frac{7+14+6+4+12+5}{6} = \frac{48}{6} = 8 \text{ €}$$

$$A: 1,3,4,5,8,9 \quad \delta_A = \frac{4+5}{2} = 4,5 \text{ €}$$

$$B: 4,5,6,7,12,14 \quad \delta_B = \frac{6+7}{2} = 6,5 \text{ €}$$

$$\beta). S_A^2 = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + 8-5^2 + 9-5^2}{6} =$$

$$= \frac{16+4+1+0+9+16}{6} = \frac{46}{6} = \frac{23}{3} \text{ €}^2.$$

$$S_B^2 = \frac{4-0^2 + 5-8^2 + 6-8^2 + 7-8^2 + 12-8^2 + 14-8^2}{6}$$

$$= \frac{16+9+4+1+16+36}{6} = \frac{82}{6} = \frac{41}{3} \text{ €}^2.$$

$$\text{Άρα } S_A = \sqrt{\frac{23}{3}} = \frac{\sqrt{69}}{3} \text{ € και } S_B = \sqrt{\frac{41}{3}} = \frac{\sqrt{123}}{3} \text{ €}.$$

$$CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{\frac{\sqrt{69}}{3}}{5} = \frac{\sqrt{69}}{15} \text{ και } CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{\frac{\sqrt{123}}{3}}{8} = \frac{\sqrt{123}}{24}.$$

$$\text{Αλλά } \left(\frac{\sqrt{69}}{15} \right)^2 = \frac{69}{225} \text{ και } \left(\frac{\sqrt{123}}{24} \right)^2 = \frac{123}{576}$$

$$\text{Όμως } \frac{69}{225} > \frac{123}{576} \Leftrightarrow (CV_A)^2 > (CV_B)^2 \Leftrightarrow CV_A > CV_B, \text{ Δηλ. Β μεγαλύτερη ομοιογένεια από το Α}$$

$$\gamma). \text{ Για δείγμα Α έχω } y_i = x_i + \frac{20}{100} \cdot x_i = 1,2 \cdot x_i. \text{ Άρα } \bar{y}_A = 1,2 \cdot \bar{x}_A = 1,2 \cdot 5 = 6 \text{ €}$$

$$\text{Για δείγμα Β έχω } y_i = x_i + 5. \text{ Άρα } \bar{y}_B = \bar{x}_B + 5 = 8 + 5 = 13 \text{ €}$$

$$\delta). CV_{A'} = \frac{1,2S_A}{1,2\bar{x}_A} = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = CV_A = \frac{\sqrt{69}}{15}, \text{ αμετάβλητη ομοιογένεια.}$$

$$CV_B' = \frac{S_B}{\bar{x}_B + 5} = \frac{\frac{\sqrt{123}}{3}}{13} = \frac{\sqrt{123}}{39}. \text{ Όμως } CV_B' < CV_B < CV_A = CV_{A'}.$$

Άρα $CV_B' < CV_{A'}$. Εξακολουθεί το δείγμα Β να έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΙΟΥΛΙΟΣ 2003 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1

- A). Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι ισχύει : $P(A') = 1 - P(A)$. Μονάδες 9
- B). Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
 Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το :
- α). $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(h)}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός
- β). $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$
- γ). $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός
- δ). $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(h)}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Μονάδες 5
- Γ). Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
 Μέτρο θέσης ενός συνόλου δεδομένων είναι :
- α). το εύρος
- β). η διάμεσος
- γ). η διακύμανση
- δ). η τυπική απόκλιση. Μονάδες 5
- Δ). Να ορίσετε το συντελεστή μεταβολής ενός συνόλου παρατηρήσεων. Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

- A). Θεωρία, B). γ, Γ). β, Δ). Θεωρία.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

α). Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β). Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f , όταν $x = 3$, ισούται με $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Μονάδες 10

γ). Αν $h(x) = \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2}$ για $x \neq 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α). Πρέπει $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = A_f$.

β). $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Έχουμε $f'(3) = \frac{3}{\sqrt{3^2 - 1}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

γ). $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1 - 3}{x - 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2} \cdot \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

ΘΕΜΑ 3

Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ' ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30. Επιλέγουμε στην τύχη μία σφαίρα. Έστω A το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος και B το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5.

Αν A' , B' είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των A και B αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες :

α). $P(A)$, $P(B)$.

Μονάδες 6

β). $P(A \cup B)$.

Μονάδες 6

γ). $P(A \cup B')$.

Μονάδες 6

δ). $P[(A' \cap B) \cup (A \cap B')]$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α). $A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 30\}$ και $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$.

$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{15}{30} = 0,5$ και $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{30} = 0,2$.

β). $A \cap B = \{10, 20, 30\}$ και $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{30} = 0,1$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6$.

γ). $P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + 1 - P(B) - P(A - B) =$
 $= P(A) + 1 - P(B) - [P(A) - P(A \cap B)] = P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) =$
 $= 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0,2 + 0,1 = 0,9$.

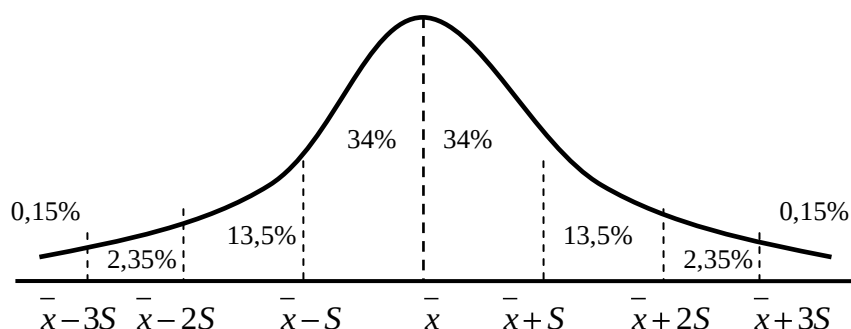
δ). $P[(A' \cap B) \cup (A \cap B')] = P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B) =$
 $= 0,5 + 0,2 - 2 \cdot 0,1 = 0,5$.

ΘΕΜΑ 4

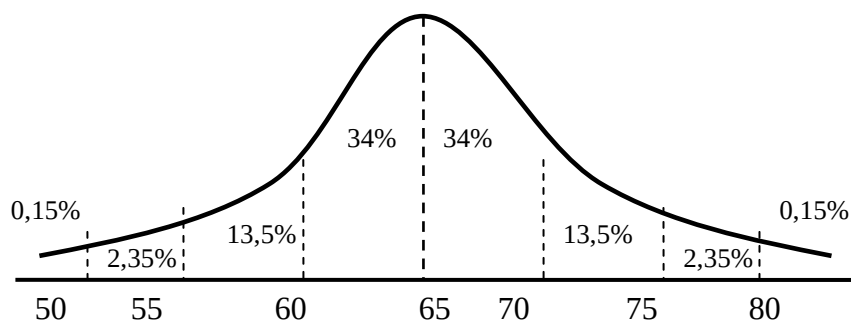
Το βάρος ενός δείγματος μαθητών λυκείου ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή. Το 50 % των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, ενώ περίπου το 47,5 % αυτών έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg.

- α). Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος. Μονάδες 6
- β). Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Μονάδες 6
- γ). Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος, που έχουν βάρος από 55 Kg έως 70 Kg. Μονάδες 6
- δ). Ο αριθμός των μαθητών του δείγματος αυτού που έχουν βάρος από 55 Kg έως 60 Kg, είναι 27. Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος. Μονάδες 7

ΛΥΣΗ



- α). Το 50 % των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, άρα $\bar{x} = \delta = 65$
 Το 47,5 % των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος από 65Kg έως 75Kg, άρα $\bar{x} + 2 \cdot S = 75$
 $65 + 2 \cdot S = 75 \Leftrightarrow 2 \cdot S = 10 \Leftrightarrow S = 5$.



β). $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{5}{65} = 7,89\% < 10\%$. Άρα είναι ομοιογενές

γ). $13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$.

δ). $[55, 60) \rightarrow 13,5\%$.

$f_i = \frac{\nu_i}{\nu} \Leftrightarrow 0,135 = \frac{27}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{27}{0,135} \Leftrightarrow \nu = 200$.

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΜΑΪΟΣ 2004 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΘΕΜΑ 1

- A). Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι ίση με 0. Μονάδες 8
 B). Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Μονάδες 5

- Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

[α]. Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι αρνητικός αριθμός.

[β]. Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $\bar{x} - s, \bar{x} + s$

όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση.

[γ]. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i . Μονάδες 6

- Δ). Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη Στήλη I αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη Στήλη II σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Να γράψετε στο τετράδιο σας τα γράμματα της Στήλης I και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης II που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

	Στήλη I		Στήλη II
α	Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	1	$A \cap B$
β	Πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	2	$A - B$
γ	Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B	3	$(A \cup B)'$
		4	$A \cup B$

Στη στήλη II περισεύει μια σχέση.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

A). Σχ. βιβλ. σελ. 28.

B). Σχ. βιβλ. σελ. 16.

Γ). α). Λάθος β). Λάθος γ). Σωστό

Δ). $\alpha \rightarrow 4, \beta \rightarrow 2 \quad \gamma \rightarrow 1$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$.

A). Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 10

B). Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

A). Πρέπει $\sqrt{x} - \sqrt{3} \neq 0$ άρα $\sqrt{x} \neq \sqrt{3} \Leftrightarrow x \neq 3$ (1) και $x \geq 0$ (2)

Από τη συναλήθευση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε : $A = [0, 3) \cup (3, +\infty)$

$$\begin{aligned} \text{B). } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{3})(x-1)(x-3)}{(\sqrt{x} + \sqrt{3})(\sqrt{x} - \sqrt{3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{3})(x-1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x} + \sqrt{3})(x-1) = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα :

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο Κλάσης x_i	Συχνότητα v_i σε χιλιάδες μονάδες	Σχετική συχνότητα f_i %	Αθροιστική συχνότητα N_i σε χιλιάδες μονάδες.	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα F_i %
[5, 15)		60			
[15, 25)					68
[25, 35)				180	
[35, 45)					
Σύνολο		200			

A). Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

Μονάδες 10

B). Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα $(x_i, f_i \%)$ και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

Γ). Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$.

Μονάδες 5

Δ). Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

A).

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσεις x_i	Συχν. v_i σε χιλ. οχ.	Σχετική συχνότητα f_i %	Αθρ. Συχν. N_i σε χιλ. οχ.	Αθρ.Σχετ. Συχν. F_i %	$x_i v_i$
[5,15)	10	60	30	60	30	600
[15,25)	20	76	38	136	68	1520
[25,35)	30	44	22	180	90	1320
[35,45)	40	20	10	200	100	800
Σύνολο		200	100			4240

$$f_1 \% = \frac{v_1}{v} \cdot 100 = \frac{60}{200} \cdot 100 = 30, \quad N_1 = v_1 = 60, \quad F_1 \% = f_1 \% = 30$$

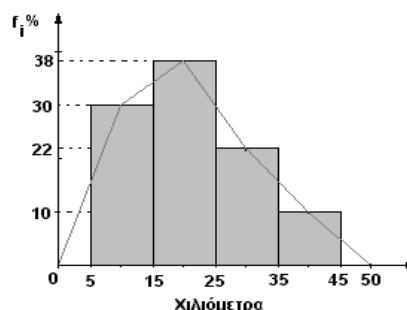
$$f_2\% = F_2\% - f_1\% = 60 - 30 = 38, \quad v_2 = f_2 \cdot v = \frac{38}{100} \cdot 200 = 76, \quad N_2 = v_1 + v_2 = 60 + 76 = 136$$

$$v_3 = N_3 - N_2 = 180 - 136 = 44, \quad f_3\% = \frac{v_3}{v} \cdot 100 = \frac{44}{200} \cdot 100 = 22, \quad F_3\% = F_2\% + f_3\% = 68 + 22 = 90,$$

$$N_4 = v = 200, \quad v_4 = N_4 - N_3 = 200 - 180 = 20, \quad f_4\% = \frac{v_4}{v} \cdot 100 = \frac{20}{200} \cdot 100 = 10$$

$$F_4\% = F_3\% + f_4\% = 90 + 10 = 100.$$

B).



$$\Gamma). \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot v_i}{v} = \frac{4240}{200} = 21,2 \text{ km}.$$

Δ). το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 km είναι

$$k = v_3 + v_4 = 44 + 20 = 64 \text{ χιλιάδες οχήματα}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2 \cdot x^3 - \frac{5}{2} \cdot x^2 + x + 10$. Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x , στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

A). Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$.

Μονάδες 9

B). Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και για $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες :

i). $P(A \cap B)$ ii). $P(A - B)$ iii). $P[(A \cap B)']$ iv). $P[(A - B) \cup (B - A)]$. Μονάδες 16

ΛΥΣΗ

A). Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 6x^2 - 5x + 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0, \quad \Delta = 1 \text{ και } x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} = x_1 \\ \frac{1}{3} = x_2 \end{cases}, \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 > 0.$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών

Οπότε : $x < \frac{1}{3}$ ή $x > \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$1/3$	$1/2$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	↗		↘	↗	
		T.M		T.E.	
		$f(1/3)$		$f(1/2)$	

Η f παρουσιάζει για $x = \frac{1}{3}$ τοπικό μέγιστο και για $x = \frac{1}{2}$ τοπικό ελάχιστο.

Άρα $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$.

B). Ισχύει : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ή $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

Άρα $P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

i). Ισχύει $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

ii). Ισχύει $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

iii). Επειδή $A - B$, $B - A$ είναι ασυμβίβιστα ενδεχόμενα ισχύει :

$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) = P(A - B) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004 –ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΘΕΜΑ 1

- A). Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε να αποδείξετε ότι $P(A) \leq P(B)$. Μονάδες 7
- B). α). Πότε ένα πείραμα ονομάζεται πείραμα τύχης;
β). Να δώσετε τον ορισμό του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης. Μονάδες 6
- Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
- α). Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$.
- β). Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .
- γ). Ισχύει $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$, όπου f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
- δ). Ισχύει $\sqrt{x}' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ με $x > 0$.
- ε). Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A') = 1 + P(A)$.
- στ). Το μέτρο διασποράς εύρος ισούται με τη διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση. Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

A). Θεωρία.

B). Θεωρία.

Γ). α). ΣΩΣΤΟ, β). ΛΑΘΟΣ, γ). ΣΩΣΤΟ, δ). ΛΑΘΟΣ, ε). ΛΑΘΟΣ, στ). ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$.

- α). Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης. Μονάδες 9
- β). Να αποδείξετε ότι $f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x}$. Μονάδες 8
- γ). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(0, f(0)). Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

$$\alpha). f'(x) = \left(\frac{x+2}{e^x} \right)' = \frac{x+2 \cdot e^x - (x+2) \cdot e^x}{e^{x^2}} = \frac{e^x - x+2 \cdot e^x}{e^{x^2}} = \frac{-1-x}{e^x}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ και γν. φθίνουσα στο $[-1, +\infty)$. τ. μέγιστο $f(-1) = e$

$$\beta). f(x) + f'(x) = \frac{x+2}{e^x} + \frac{-x-1}{e^x} = \frac{1}{e^x}.$$

$$\gamma). x_0 = 0, y_0 = f(x_0) = f(0) = 2 \text{ και } \lambda = f'(x_0) = f'(0) = -1.$$

$$(\epsilon) : y - y_0 = \lambda (x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -x + 2.$$

ΘΕΜΑ 3

Η μέση τιμή των βαθμών που πήραν οι 25 μαθητές της Γ' τάξης ενός Λυκείου στα Μαθηματικά είναι 14, ενώ η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία είναι 11.

α). Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 υπόλοιπων μαθητών. Μονάδες 12

β). Αν το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 αυτών μαθητών είναι 5000, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής (CV). Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

$$\alpha). \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i}{25} \Leftrightarrow 14 = \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i}{25} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{25} t_i = 350.$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_i}{10} \Leftrightarrow 11 = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_i}{10} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} t_i = 110. \text{ Και } \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i - \sum_{i=1}^{10} t_i}{15} = \frac{350 - 110}{15} = \frac{240}{15} = 16.$$

$$\beta). S^2 = \frac{1}{25} \cdot \left[\sum_{i=1}^{25} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{25} t_i \right)^2}{25} \right] = \frac{1}{25} \cdot \sum_{i=1}^{25} t_i - \bar{x}^2 = \frac{5000}{25} - 14^2 = 200 - 194 = 4.$$

$$\text{Άρα } S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4} = 2. \text{ και } CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2}{14} = 0,1429 \text{ ή } 14,29 \%.$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - k \cdot x^2 + 4x + 2$, όπου $k \in \Omega$.

Αν $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6)$, τότε να βρείτε:

α). Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), P(6)$. Μονάδες 8

β). Τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B , όπου

A : «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»

B : «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός».

Μονάδες 8

γ). Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ , όπου Γ : «Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ».

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α). Έστω ότι $P(1) = P(3) = P(5) = 2 \cdot P(2) = 4 \cdot P(4) = 2 \cdot P(6) = 4 \cdot \kappa$.

Άρα $P(1) = P(3) = P(5) = 4 \cdot \kappa$, $P(2) = P(6) = 2 \cdot \kappa$ και $P(4) = \kappa$.

$$\text{Ισχύει } P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot \kappa + 2 \cdot \kappa + 4 \cdot \kappa + \kappa + 4 \cdot \kappa + 2 \cdot \kappa = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 17 \cdot \kappa = 1 \Leftrightarrow \kappa = \frac{1}{17}. \text{ Επομένως } P(1) = P(3) = P(5) = \frac{4}{17}, P(2) = P(6) = \frac{2}{17} \text{ και } P(4) = \frac{1}{17}.$$

$$\beta). A = \{2, 4, 6\} \text{ και } B = \{1, 3, 5\} = A'.$$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{17} + \frac{1}{17} + \frac{2}{17} = \frac{5}{17}.$$

$$P(B) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{17} = \frac{12}{17}.$$

$$\gamma). f'(x) = x^2 - 2 \cdot \kappa \cdot x + 4.$$

Για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, πρέπει $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα πρέπει το τριώνυμο να έχει $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (-2 \cdot \kappa)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \kappa^2 - 16 \leq 0$.

κ	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$\kappa^2 - 4$		+	-	+

άρα $-2 \leq \kappa \leq 2$ και επειδή $\kappa \in \Omega$, θα είναι $\kappa = 1$ ή $\kappa = 2$.

$$\Gamma = \{1, 2\} \text{ και } P(\Gamma) = P(1) + P(2) = \frac{4}{17} + \frac{2}{17} = \frac{6}{17}.$$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 28 ΜΑΪΟΥ 2005 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1

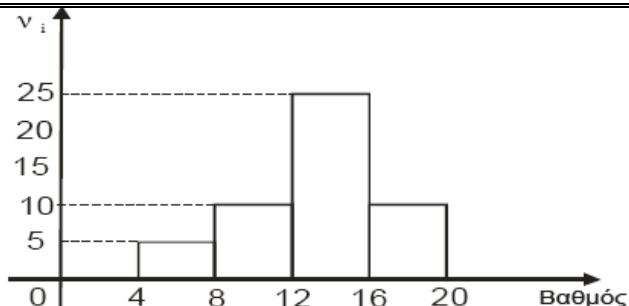
- A). Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει :
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Μονάδες 10
- B). α). Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές; Μονάδες 3
 β). Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής; Μονάδες 4
- Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
 [α]. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . Μονάδες 2
 [β]. Ισχύει $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Μονάδες 2
 [γ]. Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης. Μονάδες 2
 [δ]. Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$. Μονάδες 2

ΛΥΣΗ

- A). Θεωρία βιβλίου. Απόδειξη σελ. 151.
 B). α). θεωρία βιβλίου σελ. 59
 Γ). α). Σωστό β). Λάθος γ). Λάθος δ). Λάθος.

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων v_i .



α). Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις Βαθμολογίας [)	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθρ.σχετ. Συχνότητα F_i
[4, 8)					
[8, 12)					
[12, 16)					

[16, 20)					
Σύνολο					

Μονάδες 11

β). Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.

Μονάδες 8

γ). Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μέχρι και 10 ;

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

Κλάσεις	Κέντρο Κλάσης x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα F_i
[4, 8)	6	5	0,10	5	0,10
[8,12)	10	10	0,20	15	0,30
[12, 16)	14	25	0,50	40	0,80
[16, 20)	18	10	0,20	50	1
ΣΥΝΟΛΟ		50	1		

$$\beta) \bar{x} = \frac{6 \cdot 5 + 10 \cdot 10 + 14 \cdot 25 + 18 \cdot 10}{50} = \frac{30 + 100 + 350 + 180}{50} = \frac{660}{50} = 13,2$$

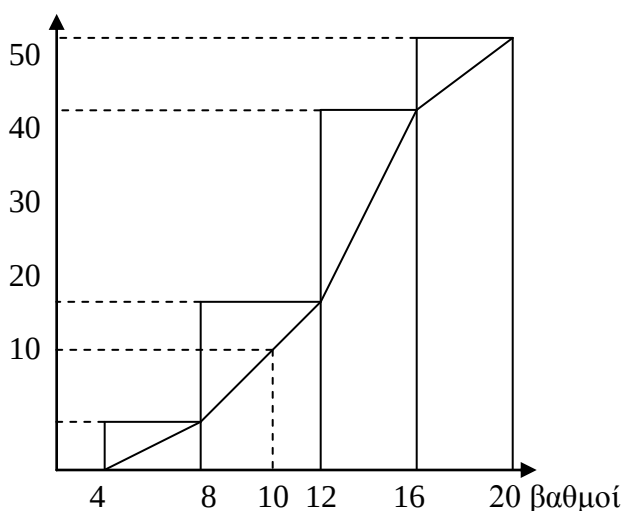
γ). Α' τρόπος

Είναι όλοι οι μαθητές της κλάσης [4, 8) και οι μισοί της κλάσης [8, 12), λόγω ομοιόμορφης κατανομής των παρ/σεων εντός της κλάσης (αφού 10 το κέντρο της) δηλ. $5 + 5 = 10$ μαθητές

Β' τρόπος

Κατασκευάζω πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

Γραφικά με τη βοήθεια του πολύγωνου αθρ. σχετ. συχνοτήτων εντοπίζω ότι το πλήθος είναι 10 μαθητές



ΘΕΜΑ 3

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , ώστε να ισχύουν:

i). Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B είναι $\frac{7}{8}$.

ii). Οι πιθανότητες $P(B)$, $P(A \cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X = \{k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\}$, όπου

$$k = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$$

α). Να βρεθεί το k.

Μονάδες 5

β). Να βρεθούν τα $P(B)$, $P(A \cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

γ). Να βρεθούν οι πιθανότητες :

- 1). Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A.
 2). Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A.

Μονάδες 6

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

$$A \subseteq \Omega, B \subseteq \Omega.$$

$$(i). P(A \cup B) = \frac{7}{8}.$$

$$(ii). P(B) \in X. P(A \cap B) \in X, P(B) \neq P(A \cap B). X = \left\{ \kappa, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}.$$

$$\alpha). \kappa = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x-15}{x^2-6x+5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{x-5} \cdot \frac{x-5}{x-1} = \frac{3}{4}. \text{ Άρα } X = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right\}.$$

$$\beta). A \cap B \subseteq B \text{ άρα } P(A \cap B) < P(B) \text{ (αφού } P(B) \neq P(A \cap B)).$$

$$\text{Άρα } P(A \cap B) = \frac{1}{2} \text{ και } P(B) = \frac{3}{4}, \text{ αφού } \frac{5}{4} > 1.$$

$$\gamma). (1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = \frac{7}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A) = \frac{5}{8}.$$

$$(2) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A - B) = \frac{1}{8}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$.

α). Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $\Lambda(1, 1)$.

Μονάδες 7

β). Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox, Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M , ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

Μονάδες 10

γ). Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (α) έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 5$ και τυπική απόκλιση $S_x = 2$.

Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{y}$ και η τυπική απόκλιση S_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty),$$

$$\alpha). f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \lambda = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1, \text{ Άρα } (\varepsilon) : y = -x + \beta.$$

$$\text{Επειδή } \Lambda \in (\varepsilon), \text{ έχω } 1 = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2. \text{ Επομένως } (\varepsilon) : y = -x + 2.$$

$$\beta). \text{ Έστω } M\left(x, \frac{1}{x}\right) \text{ το σημείο } \Pi(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2x + \frac{2}{x}.$$

$$\text{Μελετώ τη συνάρτηση } \Pi'(x) = 2 - \frac{2}{x^2}.$$

$$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \{x = 1 \text{ ή } x = -1 \text{ απρ. αφού } x > 0\}.$$

$$\Pi''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\Pi'(x)$	-		+
$\Pi(x)$			

Ελάχιστη περίμετρος όταν $x = 1$. Άρα $M(1, 1)$ Δηλαδή το σημείο ταυτίζεται με το Λ .

γ) Έστω $x_1, x_2, \dots, x_5$ τα σημεία της (ϵ) . Έστω $z_i = -x_i$ για $i = 1, 2, \dots, 5$.

Τότε $\bar{z} = -\bar{x} = -5$ και $S_z = |-1| \cdot S_x = S_x = 2$. Έστω $y_i = z_i + 2 = -x + 2$

Τότε: $\bar{y} = \bar{z} + 2 = -5 + 2 = -3$. Και $S_y = S_z = 2$. Άρα $\bar{y} = -3$ και $S_y = 2$.

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΘΕΜΑ 1

A1). Δίνονται οι συναρτήσεις $F(x)$, $f(x)$ και $g(x)$ με $F(x) = f(x) + g(x)$.

Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Μονάδες 9

A2). Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής x , αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$; Μονάδες 4

B). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α). Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς. Μονάδες 2

β). Αν $x > 0$, τότε $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Μονάδες 2

γ). Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, εκτός από τις συχνότητες f_i και n_i , χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες F_i , N_i . Μονάδες 2

δ). Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς μιας μεταβλητής είναι η μέση τιμή και η διάμεσος αυτής.

Μονάδες 2

ε). Αν για τα ενδεχόμενα A , B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει $P(A) = P(B)$, τότε είναι πάντοτε $N(A) = N(B)$. Μονάδες 2

στ). Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της. Μονάδες 2

ΛΥΣΗ

A1). Θεωρία.

A2). $CV = \frac{S}{\bar{x}}$, αν $\bar{x} > 0$, ενώ $CV = \frac{S}{-\bar{x}}$, αν $\bar{x} < 0$.

B). α). ΛΑΘΟΣ, β). ΣΩΣΤΟ, γ). ΣΩΣΤΟ, δ). ΛΑΘΟΣ, ε). ΣΩΣΤΟ, στ). ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \ln x - \beta \cdot x^2$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α). Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . Μονάδες 3

β). Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε x , το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Μονάδες 5

γ). Να βρείτε τα α και β , ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $A(1, 1)$ της γραφικής παράστασης της f να είναι $y = 3 \cdot x - 2$. Μονάδες 10

δ). Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x) \cdot x^3$. Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α). Πρέπει $x > 0$, άρα $A_f = (0, +\infty)$.

β). $f'(x) = (\alpha \cdot \ln x - \beta \cdot x^2)' = \frac{\alpha}{x} - 2 \cdot \beta \cdot x$, $x > 0$.

γ). $A(1, 1) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \ln 1 - \beta \cdot 1^2 = 1 \Leftrightarrow -\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = -1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, 1)$ είναι η $y = 3 \cdot x - 2$, άρα $f'(1) = 3 \Leftrightarrow \alpha - 2 \cdot \beta = 3 \Leftrightarrow \alpha + 2 = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

$$\delta). \lim_{x \rightarrow 2} f' \cdot x \cdot x^3 = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\left(\frac{\alpha}{x} - 2\beta x \right) \cdot x^3 \right) = \left(\left(\frac{\alpha}{2} - 4\beta \right) \cdot 8 \right) = 4 \cdot \alpha - 32 \cdot \beta = 36.$$

ΘΕΜΑ 3

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50 % των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5 % των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16, 22) με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής $\bar{x} \pm 3s$, $\bar{x} \pm 2s$, $\bar{x} \pm s$, $\bar{x}$.

α). Να δείξετε ότι $\bar{x} = 20$ και $s = 2$.

Μονάδες 10

β). Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{N}^*$, αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $(\bar{x} - \alpha s, \bar{x} + \alpha s)$ ανήκει το 95 % περίπου των παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

γ). Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{R}{2} \cdot x^2 - \bar{x} + 4 \cdot x + 9 \cdot s.$$

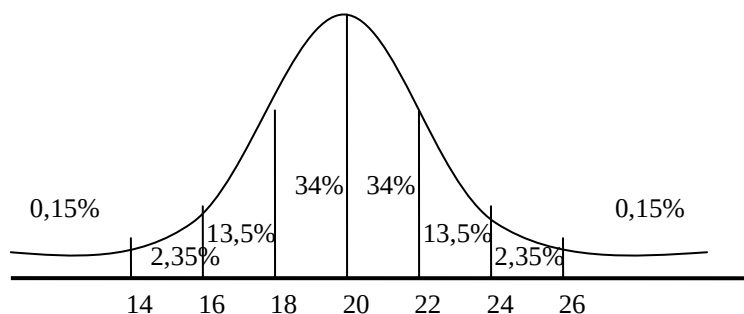
Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α). Το 50 % των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20, άρα $\bar{x} = 20$.

81,5 % των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16, 22), άρα $s = 2$.

β). Στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ βρίσκεται το 68 % των παρατηρήσεων.



Στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ βρίσκεται το 95 % των παρατηρήσεων.

Στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$, βρίσκεται το 99,7 % των παρατηρήσεων. Άρα $\alpha = 2$.

$$\gamma). R \approx 6 \cdot s = 6 \cdot 2 = 12. \quad f(x) = \frac{R}{2} \cdot x^2 \cdot (\bar{x} + 4) \cdot x + 9 \cdot s = 6 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 18.$$

$$f'(x) = 12 \cdot x - 24. \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 12 \cdot x - 24 = 0 \Leftrightarrow 12 \cdot x = 24 \Leftrightarrow x = 2.$$

Άρα αν $x \in (-\infty, 2)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και στο $(2, +\infty)$ γνησίως αύξουσα.

$$f_{\min} = f(2) = 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 18 = -6.$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα A, B, Γ του Ω είναι $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{1, 3, 4\}$, $A - B = \{2, 6\}$ και

$$\Gamma = \left\{ x \in \Omega / \frac{x+1}{x-1} \geq 2 \right\}.$$

α). Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$.

Μονάδες 9

β). Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το B και όχι το Γ.

Μονάδες 3

γ). Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα B και Γ.

Μονάδες 3

δ). Αν s^2 είναι η διακύμανση των τιμών λ , $3 \cdot \lambda$, $5 \cdot \lambda$, όπου $\lambda \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\Delta = \{\lambda \in \Omega / s^2 > 24\}$.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

$$\alpha). \rightarrow A = (A \cap B) \cup (A - B) = \{1, 2, 3, 4, 6\}. P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

$$\rightarrow B = (A \cup B) - (A - B) = \{1, 2, 3, 5\}. P(B) = \frac{N_B}{N_\Omega} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

$$\rightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow x+1 \geq 2 \cdot (x-1) \Leftrightarrow x+1 \geq 2 \cdot x - 2 \Leftrightarrow -x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 3 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3.$$

$$[\text{Πρέπει } x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, x \in \Omega \text{ άρα } x-1 > 0]$$

$$x+1 \geq 2 \cdot x - 2 \Leftrightarrow x - 2 \cdot x \geq -1 - 2 \Leftrightarrow -x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 3 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3. \text{ άρα } \Gamma = \{2, 3\}.$$

$$\text{Άρα } P(\Gamma) = \frac{N_\Gamma}{N_\Omega} = \frac{2}{10} = 0,2.$$

$$\beta). \text{ Είναι } B \cap \Gamma = \{3\} \text{ και } P(B - \Gamma) = \frac{N_{B \cap \Gamma}}{N_\Omega} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

$$P(B - \Gamma) = P(B) - P(B \cap \Gamma) = 0,4 - 0,1 = 0,3.$$

$$\gamma). P((B - \Gamma) \cup (\Gamma - B)) = P(B) + P(\Gamma) - 2 \cdot P(B \cap \Gamma) = 0,4 + 0,2 - 0,2 = 0,4.$$

$$\delta). \bar{x} = \frac{\lambda + 3\lambda + 5\lambda}{3} = \frac{9\lambda}{3} = 3\lambda \Leftrightarrow S^2 = \frac{\lambda - 3\lambda^2 + 3\lambda - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3\lambda^2}{3} = \frac{4\lambda^2 + 0 + 3\lambda^2}{3} = \frac{8\lambda^2}{3}$$

$$S^2 > 24 \Leftrightarrow \frac{8\lambda^2}{3} > 24 \Leftrightarrow 8 \cdot \lambda^2 > 72 \Leftrightarrow \lambda^2 > 9 \Leftrightarrow \lambda > 3.$$

$$\text{άρα } \Delta = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ και } P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega} = \frac{7}{10} = 0,7.$$

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2006 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΘΕΜΑ 1

A). Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και c πραγματική σταθερά. Να αποδείξετε ότι $c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x) \quad x \in R.$	Μονάδες 10
B). α). Πότε δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;	Μονάδες 3
β). Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;	Μονάδες 4
Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. [α]. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .	Μονάδες 2
[β]. Αν το ενδεχόμενο A' , συμπληρωματικό του ενδεχομένου A , πραγματοποιείται, τότε δεν πραγματοποιείται το A .	Μονάδες 2
[γ]. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$.	Μονάδες 2
[δ]. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.	Μονάδες 2

ΛΥΣΗ

A). Σχολικό βιβλίο

B). α). Σχολικό βιβλίο β). Σχολικό βιβλίο.

Γ). α). Σωστό β). Σωστό γ). Λάθος δ). Λάθος.

ΘΕΜΑ 2

Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο παρακάτω πίνακας:	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Αριθμός Βιβλίων x_i</th><th>Αριθμός Μαθητών v_i</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>$\alpha + 4$</td></tr> <tr> <td>1</td><td>$5 \cdot \alpha + 8$</td></tr> <tr> <td>2</td><td>$4 \cdot \alpha$</td></tr> <tr> <td>3</td><td>$\alpha - 1$</td></tr> <tr> <td>4</td><td>$2 \cdot \alpha$</td></tr> <tr> <td>Σύνολο</td><td>50</td></tr> </tbody> </table>	Αριθμός Βιβλίων x_i	Αριθμός Μαθητών v_i	0	$\alpha + 4$	1	$5 \cdot \alpha + 8$	2	$4 \cdot \alpha$	3	$\alpha - 1$	4	$2 \cdot \alpha$	Σύνολο	50
Αριθμός Βιβλίων x_i	Αριθμός Μαθητών v_i														
0	$\alpha + 4$														
1	$5 \cdot \alpha + 8$														
2	$4 \cdot \alpha$														
3	$\alpha - 1$														
4	$2 \cdot \alpha$														
Σύνολο	50														
α). Να υπολογίσετε την τιμή του α . Στη συνέχεια να βρείτε :	Μονάδες 3														
β). Τη μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.	Μονάδες 7														
γ). Τη διάμεσο του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.	Μονάδες 7														
δ). Την πιθανότητα ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστο 3 βιβλία.	Μονάδες 8														

ΛΥΣΗα). $\alpha + 4 + 5 \cdot \alpha + 8 + 4 \alpha + \alpha - 1 + 2 \cdot \alpha = 50 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 13 \cdot \alpha = 39 \Leftrightarrow \alpha = 3.$$

β). Για $\alpha = 3$ έχουμε τον πίνακα.

x_i	v_i	$v_i \cdot x_i$	N_i
0	7	0	7
1	23	23	30
2	12	24	42
3	2	6	44

4	6	24	50
Σύνολο	50	77	

Η μέση τιμή είναι : $\bar{x} = \frac{77}{50} = 1,54$ βιβλία.

γ). Η διάμεσος ισούται με το ημίαθροισμα της 25^{ης} και της 26^{ης} παρατήρησης δηλαδή :

$$\delta = \frac{1+1}{2} = 1 \text{ βιβλία.}$$

δ). Έστω Α το ενδεχόμενο « ένας μαθητής έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία » τότε

$$P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega} = \frac{2+6}{50} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}.$$

ΘΕΜΑ 3

Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν x αγόρια και $(x+4)^2$ κορίτσια.

α). Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι. Μονάδες 7

β). Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με $\frac{1}{19}$ και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι. μονάδες 8

γ). Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής; Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α). Έστω Α το ενδεχόμενο επιλέγεται αγόρι και Κ το ενδεχόμενο να είναι κορίτσι τότε

$$P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega} = \frac{x}{x + (x+4)^2}.$$

$$\beta). P(A) = \frac{x}{x + (x+4)^2} \Leftrightarrow \frac{x}{x + (x+4)^2} = \frac{1}{19} \Leftrightarrow x + (x+4)^2 = 19 \cdot x \Leftrightarrow x + x^2 + 8 \cdot x + 16 = 19 \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10 \cdot x + 16 = 0 \Leftrightarrow \{ x = 2 \text{ ή } x = 8 \}.$$

→ Για $x = 8$, ο αριθμός των μελών του ομίλου είναι : $x + (x+4)^2 = 8 + 12^2 > 100$ απορρίπτεται.

→ Για $x = 2$, ο αριθμός των μελών του ομίλου είναι : $x + (x+4)^2 = 2 + 36 = 38 < 100$.

Επομένως ο αριθμός των μελών του ομίλου είναι : 38 και η πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι είναι :

$$P(K) = \frac{N_K}{N_\Omega} = \frac{(x+4)^2}{x + (x+4)^2} = \frac{36}{38} = \frac{18}{19}.$$

γ). Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x}{x + (x+4)^2}$, $x > 0$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 16}{(x + (x+4)^2)^2}, x > 0$$

x	0	4	$+\infty$
f'(x)		+	-
f(x)			

έχουμε $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4$.

Η συνάρτηση f (επομένως και η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι) παρουσιάζει μέγιστο για $x = 4$, και

η μέγιστη τιμή της είναι $\frac{4}{68} = \frac{1}{17}$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + k \cdot x + 4 \cdot \sqrt{x} + 10$, $x \geq 0$.

α). Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $k=2$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 5

β). Μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = f(1)$, και τυπική

$$\text{απόκλιση } S = -\frac{2 \cdot f'(1)}{13}.$$

Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους n , είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

(i). Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(10, 16)$.

Μονάδες 10

(ii). Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.

Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου $\alpha > 0$, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α). Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = -4x + k + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Πρέπει $f'(1) = 0 \Leftrightarrow -4 + k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $(\epsilon) : y = 14$.

β). $\bar{x} = f(1) = 14$, $S = -\frac{2 \cdot f'(1)}{13} = 2$, στην κανονική κατανομή μικρότερες από $\bar{x} - 3 \cdot S = 8$

ανήκει το 0,15 % των παρατηρήσεων. Άρα $\frac{0,15}{100} \cdot n = 3 \Leftrightarrow n = 2.000$.

i). Στο διάστημα $(\bar{x} - 2 \cdot S, \bar{x} + S)$ ανήκει το 81,5 % των παρατηρήσεων

ή αλλιώς $\frac{81,5}{100} \cdot 2000 = 1630$ παρατηρήσεις.

ii) Έστω y_i οι νέες παρατηρήσεις και x_i οι αρχικές. Τότε $y_i = x_i + \alpha$.

Άρα $\bar{y} = \bar{x} + \alpha = 14 + \alpha$ και $S_y = S_x = 2$.

Πρέπει $CV_y \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{S_y}{\bar{y}} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{14 + \alpha} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \alpha \geq 6$. Άρα η ελάχιστη τιμή του α είναι 6.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΙΟΥΛΙΟΣ 2006 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1

- A). Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$. Μονάδες 9
- B1). Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$; Μονάδες 3
- B2). Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ; Μονάδες 3
- Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
- α). Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B. Μονάδες 2
- β). Ισχύει: $(\sin x)' = \eta \mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 2
- γ). Ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων. Μονάδες 2
- δ). Η διάμεσος δ είναι μέτρο διασποράς. Μονάδες 2
- ε). Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Τότε ισχύει: $P(\emptyset) < P(A \cup B) < P(\Omega)$. Μονάδες 2

ΛΥΣΗ

A). Θεωρία

B1). Θεωρία, 2. Θεωρία

Γ). α). ΛΑΘΟΣ, β). ΛΑΘΟΣ, γ). ΣΩΣΤΟ, δ). ΛΑΘΟΣ, ε). ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot (\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 9)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(2, e^2)$ είναι $y = -e^2 \cdot x + 3 \cdot e^2$, τότε:

α). Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -6$. Μονάδες 12β). Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f. Μονάδες 13**ΛΥΣΗ**α). Η εφαπτομένη της C_f στο $A(2, e^2)$ είναι $y = -e^2 \cdot x + 3 \cdot e^2$, τότε $f(2) = e^2$ και $f'(2) = -e^2$.

$$f(2) = e^2 \Leftrightarrow e^2 \cdot (\alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 9) = e^2 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta + 9 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -4 \quad (1)$$

$$f'(x) = [e^x \cdot (\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 9)]' = (e^x)' \cdot (\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 9) + e^x \cdot (\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 9)' =$$

$$= e^x \cdot (\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 9) + e^x \cdot (2\alpha \cdot x + \beta) = e^x \cdot (\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 2\alpha \cdot x + \beta + 9).$$

$$f'(2) = -e^2 \Leftrightarrow e^2 \cdot (\alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 2\alpha \cdot 2 + \beta + 9) = -e^2 \Leftrightarrow 8\alpha + 3\beta = -10 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε $\alpha = 1$ και $\beta = -6$.β). Για $\alpha = 1$ και $\beta = -6$ είναι: $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 6x + 9)$ και $f'(x) = e^x \cdot (x^2 - 4x + 3)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \{x = 1 \text{ ή } x = 3\}.$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$				

τ. μέγιστο $f(1) = e^1 \cdot (12 - 6 \cdot 1 + 9) = 4 \cdot e$. και τ. ελάχιστο $f(3) = e^3 \cdot (32 - 6 \cdot 3 + 9) = 0$.

ΘΕΜΑ 3

Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της. Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.

α). Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα «έχει πάρει στεγαστικό» και «έχει πάρει καταναλωτικό» είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 15

β). Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i). «έχει πάρει καταναλωτικό».

ii). «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό».

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α). Ονομάζουμε :

A : «Ο πελάτης έχει πάρει στεγαστικό δάνειο».

B : «Ο πελάτης έχει πάρει καταναλωτικό δάνειο».

Είναι $P((A - B) \cup (B - A)) = 0,7$ και $P((A \cup B)') = 0,1$.

$$P((A \cup B)') = 0,1 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,1 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,9 \quad (1)$$

$$P((A - B) \cup (B - A)) = 0,7 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,9 - P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2 \quad (2) \text{ Άρα } A \cap B \neq \emptyset, \text{ δηλαδή τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.}$$

β). $A - B$: «Ο πελάτης έχει πάρει μόνο στεγαστικό δάνειο».

$B - A$: «Ο πελάτης έχει πάρει μόνο καταναλωτικό δάνειο».

Είναι $P(A - B) = 0,6$.

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) \Leftrightarrow 0,7 = 0,6 + P(B - A) \Leftrightarrow P(B - A) = 0,1.$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,1 = P(B) - 0,2 \Leftrightarrow P(B) = 0,3.$$

Άρα i). $P(B) = 0,3$ και ii). $P(B - A) = 0,1$.

ΘΕΜΑ 4

Οι απουσίες των μαθητών της Γ' τάξης ενός Ενιαίου Λυκείου κατά τους μήνες Ιανουάριο – Φεβρουάριο – Μάρτιο -Απρίλιο του έτους 2006 έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Απουσίες μαθητών	Κέντρο κλάσης x_i	Σχετική συχνότητα f_i
[... , ...)	...	0,1
[... , 7)	...	...
[... , ...)	...	0,3
[... , ...)	10	...
Σύνολο		1

Αν επιπλέον δίνεται ότι η σχετική συχνότητα της 4^{ης} κλάσης f_4 είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 2^{ης} κλάσης f_2 , τότε:

α). Να αποδείξετε ότι το πλάτος c των κλάσεων ισούται με 2.

Μονάδες 10

β). Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα σχετικών συχνοτήτων στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

Μονάδες 5

γ). i). Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$.

Μονάδες 4

ii). Να βρείτε την τυπική απόκλιση s.

Μονάδες 6

$$\text{Δίνεται ο τύπος: } S^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i \cdot \nu_i \right)^2}{\nu} \right].$$

ΛΥΣΗ

α). Η 3^η κλάση είναι $[7, 7 + c)$ και η 4^η κλάση είναι $[7 + c, 7 + 2 \cdot c)$.Για την τέταρτη κλάση έχουμε : $\chi_4 = \frac{7+c+7+2c}{2} \Leftrightarrow \frac{14+3c}{2} \Leftrightarrow 14+3 \cdot c = 20 \Leftrightarrow c = 2$.β). Αν $f_2 = x$ τότε $f_4 = 2 \cdot x$. $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$
 $\Leftrightarrow 0,1 + x + 0,3 + 2 \cdot x = 1 \Leftrightarrow 3 \cdot x = 0,6 \Leftrightarrow x = 0,2$.Άρα $f_2 = 0,2$ και $f_4 = 0,4$.

Απουσίες	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[3 , 5)	4	0,1	0,4
[5 , 7)	6	0,2	1,2
[7 , 9)	8	0,3	2,4
[9 , 11)	10	0,4	4
Σύνολα	-	1	8

γ). i). $\bar{x} = \sum x_i \cdot f_i = 8$.

ii). α τρόπος

Απουσίες	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
[3 , 5)	4	0,1	0,4	1,6
[5 , 7)	6	0,2	1,2	7,2
[7 , 9)	8	0,3	2,4	19,2
[9 , 11)	10	0,4	4	40
Σύνολα	-	1	8	68

$$S^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i \cdot \nu_i \right)^2}{\nu} \right] = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot \nu_i - \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot \frac{\nu_i}{\nu} - \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot f_i - \bar{x}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S^2 = 68 - 8^2 = 68 - 64 = 4 \Rightarrow S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Β τρόπος

Απουσίες	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
[3 , 5)	4	0,1	0,4	-4	16	1,6
[5 , 7)	6	0,2	1,2	-2	4	0,8
[7 , 9)	8	0,3	2,4	0	0	0
[9 , 11)	10	0,4	4	2	4	1,6
Σύνολα	-	1	8	-	-	4

$$S^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i \Rightarrow S^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{\nu_i}{\nu} \Rightarrow \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i \Rightarrow S^2 = 4, \text{ άρα } S = \sqrt{S^2} = 2.$$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ – ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2007 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1

A). Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.	Μονάδες 8
B). α). Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;	Μονάδες 4
β). Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, όταν ο n είναι άρτιος αριθμός.	Μονάδες 3
Γ1). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.	
α). Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .	
Μονάδες 2	
β). Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει: $(f(g(x)))' = f(g(x)) \cdot g'(x)$.	Μονάδες 2
γ). Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.	Μονάδες 2
Γ2). Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:	
$f_1(x) = x^v$, όπου v φυσικός	
$f_2(x) = \ln x$, όπου $x > 0$	
$f_3(x) = \sqrt{x}$, όπου $x > 0$	
$f_4(x) = \sin x$, όπου x πραγματικός.	Μονάδες 4

ΛΥΣΗ

A). Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελ. 152.

B). α). Όταν υπάρχει το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός (Σελ. 22).

β). Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελ. 87.

Γ1). $\alpha \rightarrow \Sigma$ $\beta \rightarrow \Sigma$ $\gamma \rightarrow \Lambda$.

$$\begin{aligned} \Gamma 2). \quad f_1(x) = x^v &\rightarrow f_1'(x) = v \cdot x^{v-1}, & f_2(x) = \ln x &\rightarrow f_2'(x) = \frac{1}{x} \\ f_3(x) = \sqrt{x} &\rightarrow f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & f_4(x) = \sin x &\rightarrow f_4'(x) = \cos x. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x \cdot e^x + 3$, όπου x πραγματικός αριθμός.α). Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f(x) + e^x - 3$.

Μονάδες 10

β). Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α). $A_f = R$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R , ως άθροισμα παρ/μων συναρτήσεων με :

$$f'(x) = (x \cdot e^x + 3)' = (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' + (3)' = e^x + x \cdot e^x + 0 = e^x + x \cdot e^x \quad (1)$$

$$\text{Είναι } f(x) = x \cdot e^x + 3 \Leftrightarrow x \cdot e^x = f(x) - 3 \quad (2)$$

$$\text{Η (1) με βάση την (2) γράφεται : } f'(x) = e^x + f(x) - 3 \Leftrightarrow f'(x) = f(x) + e^x - 3.$$

$$\beta). \text{ Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x \cdot e^x - e^x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x}{x \cdot x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x - 1} = -1.$$

ΘΕΜΑ 3

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τον οποίο ισχύει

$P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2 \cdot P(3) = 2 \cdot P(4) = 2 \cdot P(5)$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω :

$A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}$, $B = \{2, x + 1, 2 \cdot x^2 + x - 2, -2 \cdot x + 1\}$, όπου x ένας πραγματικός αριθμός.

α). Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω , δηλαδή οι $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$. Μονάδες 7

β). Να βρεθεί η μοναδική τιμή του x για την οποία ισχύει $A \cap B = \{-1, 3\}$. Μονάδες 8

γ). Για $x = -1$ ναδειχθεί ότι: $P(A) = \frac{5}{11}$, $P(B) = \frac{7}{11}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{11}$.

και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(A \cup B')$. Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α). Έστω $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2 \cdot P(3) = 2 \cdot P(4) = 2 \cdot P(5) = \kappa \quad (1)$

$$\text{Είναι } P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1 \Leftrightarrow \kappa + \kappa + \kappa + \kappa + \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\kappa + \frac{3\kappa}{2} = 1 \Leftrightarrow 8\kappa + 3\kappa = 2 \Leftrightarrow 11\kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = \frac{2}{11}.$$

$$\text{Άρα } P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = \frac{2}{11} \text{ και } P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{11}.$$

β). Για να είναι $A \cap B = \{-1, 3\}$ πρέπει το -1 να είναι στοιχείο του A δηλ. πρέπει

$$x^2 - x - 3 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \{x = -1 \text{ ή } x = 2\}.$$

$\rightarrow$ Για $x = -1$, είναι $B = \{2, 0, -1, 3\}$ και $A \cap B = \{-1, 3\}$.

Για $x = 2$ είναι $B = \{2, 3, 8, -3\}$ αδύνατο, διότι το B δεν είναι ενδεχόμενο του Ω . Άρα $x = -1$.

γ). Για $x = -1$ είναι $A = \{1, 3, -1\}$ και $B = \{2, 0, -1, 3\}$.

$$\text{άρα } P(A) = P(1) + P(3) + P(-1) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} + \frac{2}{11} = \frac{5}{11}.$$

$$\text{και } P(B) = P(2) + P(0) + P(-1) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{7}{11}.$$

$$\text{Επιπλέον } A \cap B = \{-1, 3\}, \text{ άρα } P(A \cap B) = P(-1) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{3}{11}.$$

$$\text{Είναι : } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{11} - \frac{3}{11} = \frac{2}{11}.$$

$$\text{Είναι } P(A \cup B') = P[(B - A)'] = 1 - P(B - A) = 1 - [P(B) - P(B \cap A)] = 1 - \left(\frac{7}{11} - \frac{3}{11} \right) = 1 - \frac{4}{11} = \frac{7}{11}.$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε δύο δείγματα A και B με παρατηρήσεις:

Δείγμα A: 12, 18, $t_3, t_4, \dots, t_{25}$

Δείγμα B: 16, 14, $t_3, t_4, \dots, t_{25}$.

Δίνεται ότι $t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 345$.

α). Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές $\bar{x}_A$ και $\bar{x}_B$ των δύο δειγμάτων A και B αντίστοιχα είναι

$$\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15.$$

Μονάδες 7

β). Αν S_A^2 είναι η διακύμανση του δείγματος A και S_B^2 είναι η διακύμανση του δείγματος B, να

$$\text{αποδείξετε ότι : } S_A^2 - S_B^2 = \frac{16}{25}.$$

Μονάδες 8

γ). Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος A είναι ίσος με $CV_A = \frac{1}{15}$, να βρείτε τον

συντελεστή μεταβολής CV_B του δείγματος B.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

$$\alpha). \text{ Ισχύει : } \bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^v t_i}{v} = \frac{12+18+t_3+t_4+\dots+t_{25}}{25} = \frac{30+345}{25} = \frac{375}{25} = 15.$$

$$\text{Όμοια : } \bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^v t_i}{v} = \frac{16+14+t_3+t_4+\dots+t_{25}}{25} = \frac{30+345}{25} = \frac{375}{25} = 15.$$

$$\begin{aligned} \beta). \text{ Ισχύει : } S_A^2 &= \frac{1}{v} \cdot \left[\sum_{i=1}^{25} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{25} t_i \right)^2}{v} \right] = \frac{1}{25} \cdot \left[\sum_{i=1}^{25} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{25} t_i \right)^2}{25} \right] = \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i^2}{v} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{25} t_i \right)^2}{v^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i^2}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{25} t_i}{v} \right)^2 = \overline{x_A^2} - \overline{x_A}^2 \quad (1). \text{ Όμοια } S_B^2 = \overline{x_B^2} - \overline{x_B}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε : } S_A^2 - S_B^2 &= \left[\overline{x_A^2} - \overline{x_A}^2 \right] - \left[\overline{x_B^2} - \overline{x_B}^2 \right] = \overline{x_A^2} - \overline{x_A}^2 - \overline{x_B^2} + \overline{x_B}^2 = \overline{x_A^2} - \overline{x_B^2} = \\ &= \frac{12^2 + 18^2 + t_3^2 + t_4^2 + \dots + t_{25}^2}{25} - \frac{16^2 + 14^2 + t_3^2 + t_4^2 + \dots + t_{25}^2}{25} = \frac{12^2 + 18^2 - 16^2 - 14^2}{25} = \frac{16}{25}. \end{aligned}$$

$$\gamma). \text{ Είναι } CV = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{S_A}{15} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow S_A = 1.$$

$$\text{Από β) ερώτημα είναι } S_A^2 - S_B^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow 1^2 - S_B^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow S_B^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow S_B = \frac{3}{5} \quad (\text{αφού } S_B > 0)$$

$$\text{Άρα } CV_B = \frac{S_B}{x_B} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{15}} = \frac{3}{5 \cdot 15} = \frac{1}{25}.$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 29 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΘΕΜΑ 1

- A). Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$. Μονάδες 8
- B). α). Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A κάποιου δειγματικού χώρου Ω . Μονάδες 4
- β). Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:
- i). $P(\Omega)$ ii). $P(\emptyset)$. Μονάδες 3
- Γ1). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.
- α). Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους n και ότι f_i , $i = 1, 2, \dots, k$, είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών x_i μιας μεταβλητής. Αν a_i είναι το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε:
- $a_i = 360 \cdot f_i$, για $i = 1, 2, \dots, k$. Μονάδες 2
- β). Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$, τότε ισχύει
- $$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$
- Μονάδες 2
- γ). Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . Μονάδες 2
- Γ2). Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:
- $f_1(x) = e^x$, όπου x πραγματικός.
- $f_2(x) = \frac{1}{x}$, όπου $x \neq 0$.
- $f_3(x) = \eta \mu x$, όπου x πραγματικός.
- $f_4(x) = c$, όπου x πραγματικός και c σταθερά. Μονάδες 4

ΛΥΣΗ

A). Θεωρία

B). α). Θεωρία β). i). 1, ii). 0.

Γ1). α). ΣΩΣΤΟ β). ΣΩΣΤΟ γ). ΣΩΣΤΟ.

Γ2). $f_1'(x) = e^x$, $f_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f_3'(x) = \sigma \nu x$, $f_4'(x) = 0$.**ΘΕΜΑ 2**

- Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$
- α). Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$. Μονάδες 5
- β). Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. Μονάδες 8
- γ). Να εξετασθεί η συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της.

ΛΥΣΗ

α). Πρέπει $x^2 - x + 1 \neq 0$, (ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι $\Delta = -8 < 0$). Άρα $x \in \mathbb{R}$.

$$\beta). \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 - x + 1} = -\frac{1}{3}.$$

$$\gamma). f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - x + 1} \right)' = \frac{x' \cdot (x^2 - x + 1) - x \cdot (x^2 - x + 1)'}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \{x = 1 \text{ ή } x = -1\}.$$

Η f είναι γν. φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$, ενώ είναι γν. αύξουσα στο $[-1, 1]$.

$$\text{τοπ. ελάχιστο } f(-1) = \frac{-1}{-1^2 - (-1) + 1} = -\frac{1}{3} \text{ και τοπ. μέγιστο } f(1) = \frac{1}{1^2 - 1 + 1} = 1.$$

ΘΕΜΑ 3

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$A = \{x \in \Omega / 0 \leq \ln(x-1) < \ln 3\},$$

$$B = \{x \in \Omega / (x^2 - 5x) \cdot (x-1) = -6 \cdot (x-1)\}.$$

α). Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(B \cup A')$.

Μονάδες 8

β). Αν $P(A) = \frac{1}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A' \cup B')$.

Μονάδες 7

γ). Αν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B - A) = \frac{1}{8}$, να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας $P(X)$, όπου X είναι ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $A \cup X = B$.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α). $\rightarrow 0 \leq \ln(x-1) < \ln 3 \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln(x-1) < \ln 3$ και επειδή η συνάρτηση g , με $g(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα $1 \leq x-1 < 3 \Leftrightarrow 2 \leq x < 4$, άρα $A = \{2, 3\}$.

$$\rightarrow (x^2 - 5x) \cdot (x-1) = -6 \cdot (x-1) \Leftrightarrow (x^2 - 5x) \cdot (x-1) + 6 \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \{x-1=0 \text{ ή } x^2 - 5x + 6=0\} \Leftrightarrow \{x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=3\},$$

$$\text{άρα } B = \{1, 2, 3\}.$$

 $\rightarrow$ Είναι $A \subseteq B$, άρα $A - B = \emptyset$ και $P(A - B) = 0$. $\rightarrow$ Είναι $A' = \{1, 4, 5\}$ άρα $B \subseteq A' = \Omega$ και $P(B \cup A') = 1$.β). Είναι $A' = \{1, 4, 5\}$, $B' = \{4, 5\}$, άρα $A' \cup B' = A'$ και $P(A' \cup B') = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(A' \cup B') = \frac{3}{4}.$$

γ). Είναι $A \cup X = B$, άρα $X = \{1\} = X_1$ ή $X = \{1, 2\} = X_2$ ή $X = \{1, 3\} = X_3$ ή $X = \{1, 2, 3\} = B$ $\rightarrow$ Είναι $X_1 \subseteq X_2$, $X_1 \subseteq X_3$ και $X_1 \subseteq B$, άρα $\min P(X) = P(X_1) = P(1) = P(B - A) = \frac{1}{8}$. $\rightarrow$ Επίσης $X_1 \subseteq B$, $X_2 \subseteq B$ και $X_3 \subseteq B$,

$$\text{άρα } \max P(X) = P(B) = P(A) + P(B - A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ ένα δείγμα με παρατηρήσεις: 7, 5, α , 2, 5, β , 8, 6, γ , 5, 3, όπου α, β, γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha < \beta < \gamma$. Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 6$, $\delta = 6$ και $R = 8$ αντίστοιχα.

α). Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ , έτσι ώστε να ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$. Μονάδες 8

β). Για τις τιμές των α, β, γ , που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, ναδειχθεί ότι η τυπική

απόκλιση του δείγματος είναι ίση με $s_x = \sqrt{\frac{58}{11}}$ και να εξετασθεί αν το δείγμα είναι

ομοιογενές.

Μονάδες 8

γ). Έστω $y_1, y_2, \dots, y_{11}$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις $x_1, x_2, \dots, x_{11}$

επί μια θετική σταθερά c_1 και στη συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά c_2 . Αν $\bar{y} = 9$ και $s_y = 2 \cdot s_x$,

να βρεθούν οι τιμές των σταθερών c_1 και c_2 .

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α). Αφού $n = 11$ και $\delta = 6$, τότε αν γράψουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά, 5 παρατηρήσεις είναι μικρότερες ή ίσες του 6.

Έχουμε ότι οι παρατηρήσεις 2, 3, 5, 5, 5 είναι μικρότερες του 6, άρα οι παρατηρήσεις α, β, γ είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 6. Επομένως $6 \leq \alpha < \beta < \gamma$.

$R = 8$ άρα $\gamma - 2 = 8 \Leftrightarrow \gamma = 10$.

* Η μεγαλύτερη τιμή είναι το γ και όχι το 8 διότι αν ήταν το 8, τότε $R = 6$.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} \Leftrightarrow 6 = \frac{41 + \alpha + \beta + \gamma}{11} \Leftrightarrow 41 + \alpha + \beta + 10 = 66 \Leftrightarrow 11 \cdot \alpha = 15 - \beta \quad (1)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217 \Leftrightarrow (15 - \beta)^2 + \beta^2 + 100 = 217 \Leftrightarrow 225 - 30\beta + \beta^2 + \beta^2 + 100 - 217 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\beta^2 - 30\beta + 108 = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 15\beta + 54 = 0 \Leftrightarrow \{ \beta = 9 \text{ ή } \beta = 6 \} \Rightarrow \beta = 9.$$

(απορρίπτεται διότι $6 \cdot \alpha < \beta < \gamma = 10$) Άρα $\beta = 9$ και από την (1) $\Rightarrow \alpha = 6$.

β). Για $\alpha = 6, \beta = 9$ και $\gamma = 10$ οι παρατηρήσεις είναι : 2, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10

$$S_x^2 = \frac{2-6^2 + 3-6^2 + 5-6^2 + 2 \cdot 6-6^2 + 7-6^2 + 8-6^2 + 9-6^2 + 10-6^2}{11} =$$

$$= \frac{16+9+3+0+1+4+9+16}{11} = \frac{58}{11}, \text{ άρα } S_x = \sqrt{\frac{58}{11}} \text{ και}$$

$$CV_x = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{58}{11}}}{6} \Rightarrow CV_x^2 = \frac{\frac{58}{11}}{36} = \frac{29}{198} > \frac{1}{100}. \text{ Άρα } CV_x > \frac{1}{10}.$$

Επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

γ). Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου έχουμε

$$\rightarrow \bar{y} = c_1 \cdot \bar{x} + c_2 \Leftrightarrow 9 = 6 \cdot c_1 + c_2 \quad (2)$$

$$\rightarrow S_y = c_1 \cdot S_x \Leftrightarrow 2 \cdot S_x = c_1 \cdot S_x \Leftrightarrow c_1 = 2.$$

$$(2) \Rightarrow 9 = 12 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -3.$$

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΕΜΠΤΗ
22 ΜΑΪΟΥ 2008 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΘΕΜΑ 1

- A). Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ (όπου x πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)' = 0$. Μονάδες 8
- B). Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X , αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$; Μονάδες 7
- Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α). Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ο τύπος $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα. Μονάδες 2
- β). Η διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές. Μονάδες 2
- γ). Αν $x > 0$, τότε $\sqrt{x}' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$. Μονάδες 2
- δ). Αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$. Μονάδες 2
- ε). Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος. Μονάδες 2

ΛΥΣΗ

A). Θεωρία: σελ. 28 σχολικό βιβλίο.

B). Θεωρία: σελ. 96 σχολικό βιβλίο

Γ). α. Λάθος β. Λάθος γ. Σωστό δ. Σωστό ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

- α). Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \cdot f'(x)}{x^2 - 1}$. Μονάδες 7
- β). Να αποδείξετε ότι $e^x \cdot f'(x) = 2 - x$. Μονάδες 9
- γ). Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$. Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α). Είναι $\frac{e^x \cdot f(x)}{x^2 - 1} = \frac{e^x \cdot \frac{x-1}{e^x}}{x^2 - 1} = \frac{x-1}{x^2 - 1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$. Έτσι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \cdot f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

$$\beta). f'(x) = \left(\frac{x-1}{e^x} \right)' = \frac{x-1 \cdot e^x - (x-1)(e^x)'}{e^{x^2}} = \frac{e^x - (x-1)e^x}{e^{x^2}} = \frac{e^x [1 - x - 1]}{e^{x^2}} =$$

$$= \frac{1-x+1}{e^x} = \frac{2-x}{e^x}. \text{ Άρα } e^x \cdot f'(x) = e^x \cdot \frac{2-x}{e^x} = 2-x.$$

$$\gamma). \text{ έχουμε : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{e^x} > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ Δηλαδή έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών :}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'(x)		○	
f(x)			

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 2$, το $f(2) = \frac{1}{e^2}$.

ΘΕΜΑ 3

Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

<u>A</u>	<u>B</u>
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

α). Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β. Μονάδες 5

β). Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας). Μονάδες 5

γ). Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών. Μονάδες 7

δ). Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

Δίνεται ότι $\sqrt{11} = 3,3$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

$$A). \bar{x}_A = \frac{20+26+24+22+18}{5} = \frac{110}{5} = 22 \Rightarrow \bar{x}_A = 22$$

$$\bar{x}_B = \frac{26+32+19+20+23}{5} = \frac{120}{5} = 24 \Rightarrow \bar{x}_B = 24.$$

Β). Κατά μέσο όρο μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει $\frac{38}{22} = \frac{19}{11}$ ευρώ / χίλιες ώρες, ενώ μια μπαταρία

τύπου Β στοιχίζει $\frac{40}{24} = \frac{5}{3}$ ευρώ / χίλιες ώρες.

Επειδή $\frac{5}{3} < \frac{19}{11}$ συμφέρει να αγορασθεί μπαταρία τύπου Β.

$$\Gamma). s_A^2 = \frac{(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2}{5} =$$

$$= \frac{2^2 + 4^2 + 2^2 + 0 + 4^2}{5} = \frac{4 + 16 + 4 + 16}{5} = \frac{40}{5} = 8. \quad s_A = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

$$S_B^2 = \frac{(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2}{5} =$$

$$\frac{2^2 + 8^2 + 5^2 + 4^2 + 1^2}{5} = \frac{4 + 16 + 4 + 16}{5} = \frac{40}{5} = 8. \quad s_B = \sqrt{22} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{11}.$$

$$\Delta). \quad CV_A = \frac{s_A}{x_A} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11} \quad CV_B = \frac{s_B}{x_B} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}}{24}$$

$$\text{Είναι } CV_B > CV_A \text{ διότι } \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}}{24} > \frac{\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{11}}{24} > \frac{1}{11} \Leftrightarrow 11 \cdot \sqrt{11} > 24, \text{ που ισχύει επειδή}$$

$\sqrt{11} \approx 3,3$ και $11 \cdot 3,3 > 24 \Leftrightarrow 36,3 > 24$. Άρα το δείγμα Α παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

ΘΕΜΑ 4

Το 50 % των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30 % των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

α). Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάσει την εφημερίδα α ή να διαβάσει την εφημερίδα β; Μονάδες 7

β). Ορίζουμε το ενδεχόμενο

B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».

Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{5} < P(B) < \frac{7}{10}$. Μονάδες 9

γ). Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + P(B) \cdot x$, όπου x πραγματικός αριθμός και

B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ακρότατα. Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

A : «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα α».

B : «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε: $P(A) = 0,5$ και $P(A \cap B') = 0,3$.

$$P(A \cap B') = 0,3 \Leftrightarrow P(A - B) = 0,3 \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0,3 \Leftrightarrow 0,5 - P(A \cap B) = 0,3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2 = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{Α). } P(B \cup A') &= P(B) + P(A') - P(B \cap A') = P(B) + 1 - P(A) - P(B - A) = \\ &= P(B) + 1 - P(A) - [P(B) - P(B \cap A)] = P(B) + 1 - P(A) - P(B) + P(B \cap A) = \\ &= 1 - P(A) + P(B \cap A) = 1 - 0,5 + 0,2 = 0,7. \text{ Άρα } P(A' \cup B) = 0,7 = \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

$$\text{Β). ισχύει: } A \cap B \subseteq B \text{ άρα } P(A \cap B) \leq P(B) \Rightarrow \frac{1}{5} \leq P(B).$$

$$\text{Ακόμα ισχύει: } B \subseteq A' \cup B \text{ άρα } P(B) \leq P(A' \cup B) \Rightarrow P(B) \leq \frac{7}{10}.$$

Γ). $f(x) = 3 \cdot x^2 - x + P(B)$. έχουμε: $\Delta = 1 - 12 \cdot P(B)$ και από το Β ερώτημα ισχύει

$$P(B) \geq \frac{1}{5} > \frac{1}{12} \Leftrightarrow P(B) > \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12 \cdot P(B) > 1 \Leftrightarrow 1 - 12 \cdot P(B) < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0.$$

Η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο και $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών επομένως δεν παρουσιάζει ακρότατα.

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 1 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008 ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΘΕΜΑ 1

- A). Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
Να αποδείξετε ότι : $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$. Μονάδες 9
- B). α). Να δώσετε τον ορισμό της διακύμανσης των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_n$ μιας μεταβλητής X . Μονάδες 3
- β). Πότε δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα ; Μονάδες 3
- Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α). Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος δεν ξεπερνά το 10 %. Μονάδες 2
- β). Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη.
- γ). Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό L_1 , δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = L_1^n$. (n θετικός ακέραιος). Μονάδες 2
- δ). Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . Μονάδες 2
- ε). Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Μονάδες 2

ΛΥΣΗ

A). Σχολικό βιβλίο σελίδα 31.

B). α). Σχολικό βιβλίο σελίδα 93. β). Σχολικό βιβλίο σελίδα 142

Γ). α). Σωστό, β). Σωστό, γ). Σωστό, δ). Λάθος, ε). Λάθος.

ΘΕΜΑ 2

έση βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα τεστ είναι 70. Χωρίζουμε τη βαθμολογία σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα n_i	Σχετική συχνότητα f_i
20 – 40			
40 – 60			
60 – 80			
80 – 100			
Σύνολα			

Είναι επιπλέον ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 20 έως 40 είναι ίσο με το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 40 έως 60, ενώ στο κυκλικό διάγραμμα των δεδομένων, η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση από 80 έως 100 είναι 108° .

Να δείξετε ότι $f_1 = f_2 = \frac{1}{10}$, $f_3 = \frac{5}{10}$, $f_4 = \frac{3}{10}$.

Μονάδες 10

Αν ο αριθμός των μαθητών της τάξης είναι 50, τότε:

- i). Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον πίνακα συχνοτήτων και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του. Μονάδες 5
- ii). Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60. Μονάδες 5
- iii). Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70. Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

$$\alpha). \rightarrow \alpha_4 = f_4 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow 108^\circ = f_4 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow f_4 = 0,3 \text{ ή } f_4 = 0,3.$$

Κλάσεις	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[20 , 40)	30	f_1	$30f_1$
[40 , 60)	50	f_1	$50f_1$
[60 , 80)	70	f_3	$70f_3$
[80 , 100)	90	0,3	27
ΣΥΝΟΛΑ	–	1	$27 + 80 \cdot f_1 + 70 \cdot f_3$

$$\rightarrow \sum f_i = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot f_1 + f_3 + 0,3 = 1 \Leftrightarrow f = 0,7 - 2 \cdot f_1 \quad (1)$$

$$\rightarrow \bar{x} = \sum x_i \cdot f_i \Leftrightarrow 70 = 27 + 80 \cdot f_1 + 70 \cdot f_3 \Leftrightarrow 70 = 27 + 80 \cdot f_1 + 70 \cdot (0,7 - 2 \cdot f_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 70 = 27 + 80 \cdot f_1 + 49 - 140 \cdot f_1 \Leftrightarrow 60 \cdot f_1 = 6 \Leftrightarrow f_1 = 0,1 = f_2.$$

$$(1) \Rightarrow f_3 = 0,7 - 2 \cdot 0,1 \Leftrightarrow f_3 = 0,5.$$

β). i).

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i
[20 , 40)	30	5	0,1
[40 , 60)	50	5	0,1
[60 , 80)	70	25	0,5
[80 , 100)	90	15	0,3
ΣΥΝΟΛΑ	–	50	1

ii). Το πλήθος των μαθητών με βαθμολογία τουλάχιστον 60, είναι $v_3 + v_4 = 25 + 15 = 40$ μαθητές.

iii). Το ποσοστό των μαθητών με βαθμολογία από 50 ως 70, είναι

$$\frac{f_2\%}{2} + \frac{f_3\%}{2} = \frac{10\%}{2} + \frac{50\%}{2} = \frac{60\%}{2} = 30\%.$$

ΘΕΜΑ 3

Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και p ένας πραγματικός αριθμός με $0 < p < 1$. Δίνεται ότι οι πιθανότητες $P(A)$, $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου $\{p-1, p, p+1, p^2, p^3\}$.

- α). Να δείξετε ότι $P(A) = p^2$, $P(A \cup B) = p$ και $P(A \cap B) = p^3$. Μονάδες 9
- β). Να αποδείξετε ότι $P(B) = p^3 - p^2 + p$. Μονάδες 8
- γ). Να αποδείξετε ότι $P(B - A) > P(A - B)$. Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α). $\rightarrow$ Είναι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, άρα $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$, και επειδή οι πιθανότητες είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους, τότε $P(A \cap B) < P(A) < P(A \cup B)$ (1)

$\rightarrow$ Επίσης $0 < p < 1$, άρα $p-1 < 0$ και $p+1 > 1$.

Επομένως τα $p-1$ και $p+1$ δεν είναι πιθανότητες (2)

$\rightarrow 0 < p < 1 \Leftrightarrow 0 < p^2 < p \Leftrightarrow 0 < p^3 < p^2$. Επομένως $p^3 < p^2 < p$ (3).

Από (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι : $P(A \cap B) = p^3$, $P(A) = p^2$ και $P(A \cup B) = p$.

$$\beta). P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = P(A \cap B) - P(A) + P(A \cup B) \Leftrightarrow P(B) = p^3 - p^2 + p.$$

$$\gamma). P(B - A) > P(A - B) \Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) > P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) > P(A) \Leftrightarrow p^3 - p^2 + p > p^2 \Leftrightarrow p^3 - 2p^2 + p > 0 \Leftrightarrow p \cdot (p^2 - 2p + 1) > 0 \Leftrightarrow p \cdot (p - 1)^2 > 0, \text{ που ισχύει } \text{διότι } p > 0 \text{ και } p \neq 1. \text{ Επομένως } P(B - A) > P(A - B).$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1).

Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Έστω ότι το μήκος του τοίχου θα χρησιμοποιηθεί είναι x .

α). Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε.



Σχήμα 1

$$\text{από τον τύπο } f(x) = 100 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2.$$

Μονάδες 6

β). Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των 200 m.

Μονάδες 7

γ). Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών $f'(100)$, $f'(101)$, $f'(102)$, $f'(103)$ και $f'(104)$. Μονάδες 5

δ). Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών $f'(100)$, $f'(101)$, $f'(102)$, $f'(103)$ και $f'(104)$ και CV' ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς κατά c , όπου $c \neq 2$. Να υπολογίσετε το c , έτσι ώστε να ισχύει $CV' = 2 \cdot CV$. Μονάδες 7

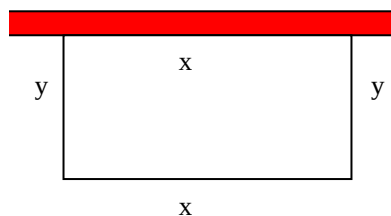
ΛΥΣΗ

$$\alpha). x + 2 \cdot y = 200 \Leftrightarrow 2 \cdot y = 200 - x \Leftrightarrow y = 100 - x.$$

Εμβαδόν περιφραγμένης περιοχής είναι :

$$E = f(x) = x \cdot y \Leftrightarrow f(x) = x \cdot (100 - x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 100 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2, x \in (0, 200).$$



$$\text{Περιορισμοί : } x > 0, y > 0 \Leftrightarrow 100 - \frac{1}{2} \cdot x > 0 \Leftrightarrow x < 200$$

$$\beta). \text{ Έχουμε : } f'(x) = 100 - x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 100.$$

Η συνάρτηση του εμβαδού είναι αν $x \in (0, 100)$ γνησίως αύξουσα και για $x \in (100, 200)$ είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως έχει μέγιστη τιμή στην θέση $x = 100$ με $f(100) = 5.000 \text{ m}^2$.

$$\gamma). f'(100) = 100 - 100 = 0, f'(101) = 100 - 101 = -1, f'(102) = 100 - 102 = -2$$

$$f'(103) = 100 - 103 = -3, f'(104) = 100 - 104 = -4,$$

$$\bar{x} = \frac{0 + (-1) + (-2) + (-3) + (-4)}{5} = \frac{-10}{5} = -2 \Leftrightarrow \bar{x} = -2.$$

$$\delta). \text{ Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου έχουμε : } \bar{x}' = \bar{x} + c = -2 + c = c - 2 \text{ και } S' = S.$$

$$CV' = 2 \cdot CV \Leftrightarrow \frac{S'}{|\bar{x}'|} = 2 \cdot \frac{S}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow \frac{S}{|c-2|} = 2 \cdot \frac{S}{|-2|} \Leftrightarrow \frac{1}{|c-2|} = 1 \Leftrightarrow |c-2| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{c-2=1 \text{ ή } c-2=-1\} \Leftrightarrow \{c=3 \text{ ή } c=1\}.$$

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΑ 18
ΜΑΪΟΥ 2009 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΘΕΜΑ 1

- A). Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Μονάδες 10
- B). Αν $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n ($k \leq n$), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i=1, 2, \dots, k$. Μονάδες 5
- Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α). Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Μονάδες 2
- β). Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ισχύει ότι $A - B = A \cup B'$. Μονάδες 2
- γ). Για τη συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ ισχύει ότι $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu x$. Μονάδες 2
- δ). Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Μονάδες 2
- ε). Η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης. Μονάδες 2

ΛΥΣΗ

A). Θεωρία

B). Θεωρία

Γ). $\alpha \rightarrow \Lambda \quad \beta \rightarrow \Sigma \quad \gamma \rightarrow \Lambda \quad \delta \rightarrow \Sigma \quad \varepsilon \rightarrow \Sigma$ **ΘΕΜΑ 2**

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i , $i = 1, 2, 3, 4$ μιας μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες v_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Η συχνότητα v_2 που αντιστοιχεί στην τιμή $x_2 = 3$ είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με $\bar{x} = 4$.

α). Να αποδείξετε ότι $v_2 = 7$.

Μονάδες 9

β). Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.

Μονάδες 9

γ). Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής X είναι ομοιογενές.

Μονάδες 7

Δίνεται ότι $\sqrt{4,9} \approx 2,2 \ll 2,2$.

x_i	v_i
2	6
3	;
5	3
8	4

ΛΥΣΗΣυμπληρώνουμε τον πίνακα και έχουμε : έστω $v_2 = \alpha$.

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
2	6	12	24
3	α	$3 \cdot \alpha$	α

5	3	15	3
8	4	32	64
Σύνολα	13+α	59+3α	91+α

$$\alpha). \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \cdot \nu_i}{\nu} \Leftrightarrow 4 = \frac{59+3\alpha}{13+\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 7.$$

$$\beta). S^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i - \bar{x}^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{98}{20} = 4,9.$$

$$\gamma). CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2,2}{4} = 0,55 > 0,10, \text{ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

ΘΕΜΑ 3

Λύνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$, όπου α πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει $2 \cdot f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$

α). Να δείξετε ότι $\alpha = 9$.

Μονάδες 7

β). Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$.

Μονάδες 8

γ). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α). έχουμε : $f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha$ και $f''(x) = 6x - 12$, με αντικατάσταση στη σχέση έχουμε : $2 \cdot f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 2 \cdot (6x - 12) + (3x^2 - 12x + \alpha) + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow \alpha = 9$.

β). από το ερώτημα α) έχουμε : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.

$$\text{Άρα : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-3)}{x+1} = -3.$$

γ). η εφαπτόμενη της f είναι παράλληλη με την ευθεία, αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) = -3 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = -3 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Άρα η (ε) : $y - f'(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y + 5 = -3(x - 2) \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2$, $x > 0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

A). α). Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 6

β). Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B). Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$, $f(3)$ και $f(5)$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X .

α). Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι :

$$R = 3 + \ln \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

Μονάδες 7

β). Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω , να υπολογίσετε την πιθανότητα

του ενδεχομένου $A = \{\lambda \in \Omega / R + \delta < -2\}$.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

A). Για $x > 0$, έχουμε : $f(x) = f(x) = [\ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2]' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{x}$

και $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$, και $f(x) > 0 \Rightarrow x < 2$.

έχουμε τον διπλανό πίνακα.

Όπου $f(2) = \lambda^2 - 6\lambda + \ln 2$.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

B). α). Για $x > 2$, η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε θα ισχύει : $f(8) < f(5) < f(4) < f(3) < f(2)$.

Άρα έχουμε το εύρος $R = f(2) - f(8) = 3 + \ln \frac{1}{4}$ και $\delta = f(4) = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$.

β). από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε : $R + \delta < -2 \Leftrightarrow 3 + \ln \frac{1}{4} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0 \Leftrightarrow 1 < \lambda < 5$. άρα το $A = \{2, 3, 4\}$, οπότε και το $P(A) = \frac{3}{100}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1

- A). Να δείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου, ισχύει $P(A') = 1 - P(A)$. Μονάδες 9
- B). α). Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$; Μονάδες 3
 β). Αν $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X σε δείγμα μεγέθους n, να ορίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων. Μονάδες 3
- Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α). Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό L, δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n μεγαλύτερο του 1 θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = n \cdot L^{n-1}$. Μονάδες 2
- β). Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) = e^x$. Μονάδες 2
- γ). Η διάμεσος ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50 % των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50 % των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν. Μονάδες 2
- δ). Αν η καμπύλη συχνοτήτων για ένα χαρακτηριστικό είναι κανονική ή περίπου κανονική με τυπική απόκλιση S και εύρος R, τότε ισχύει $S \approx 6 \cdot R$. Μονάδες 2
- ε). Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο. Μονάδες 2

ΛΥΣΗ

- A). Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 150.
- B). α). Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 14.
 β). Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 85.
- Γ). α). Λάθος β). Σωστό γ). Σωστό δ). Λάθος ε). Σωστό.

ΘΕΜΑ 2

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \cdot x^3 - 8$, όπου a ένας πραγματικός αριθμός.
- α). Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -7$, να βρεθεί η τιμή του a. Μονάδες 5
- β). Έστω $a = 1$.
- i). Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$. Μονάδες 10
- ii). Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$. Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α). Δίνεται και $f(x) = a \cdot x^3 - 8$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -7$, οπότε : $\lim_{x \rightarrow 1} (a \cdot x^3 - 8) = -7 \Leftrightarrow a \cdot 1^3 - 8 = -7 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a - 8 = -7 \Leftrightarrow a = 1$.

β). Αφού $a = 1$, έχω $f(x) = x^3 - 8$, οπότε

i). Για $x \neq 2$, $\frac{f(x)}{x-2} = \frac{x^3 - 8}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} \cdot \frac{x^2 + 2x + 4}{x-2} = x^2 + 2x + 4$.

$$\text{Άρα : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 12.$$

ii). Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f είναι της μορφής :

$y = \lambda \cdot x + \beta$. Το σημείο που έχει τετμημένη $x_0 = 2$, έχει τεταγμένη: $y_0 = f(2) = 0$.

Συνεπώς ζητείται η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της στο σημείο

$f(x) = x^3 - 8 =$ στο σημείο $A(2, 0)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (x^3 - 8)' = 3 \cdot x^2$, άρα η γραφική της παράσταση δέχεται εφαπτομένη με κλίση $\lambda = f'(2) = 12$.

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση γίνεται $y = 12 \cdot x + \beta$, και πρέπει να επαληθεύεται από το σημείο $A(2,0)$ συνεπώς : $0 = 12 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 0 = 24 + \beta \Leftrightarrow \beta = -24$.

Τελικά ,η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f είναι :

$$y = 12 \cdot x - 24.$$

ΘΕΜΑ 3

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους $n = 72$ με αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες v_1, v_2, v_3, v_4 , όπου $v_4 = 3 \cdot v_3$. Δίνεται επίσης ότι τα τόξα του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχούν στις τιμές x_1 και x_2 είναι αντίστοιχα 50° και 30° .

α). Να βρεθούν οι συχνότητες $v_i, i = 1, 2, 3, 4$.

Μονάδες 10

β). Να βρεθούν τα τόξα που αντιστοιχούν στις τιμές x_3 και x_4 .

Μονάδες 8

γ). Δίνεται ότι $x_1 < -7, x_2 = -7, x_3 = 3$, και $x_4 > 3$. Να δειχθεί ότι : $10 \cdot R + 72 \cdot \bar{x} = 52 \cdot \delta$, όπου $R, \bar{x}, \delta$ είναι αντίστοιχα το εύρος, η μέση τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α). Γνωρίζουμε ότι το τόξο α_i ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων δίνεται

$$\text{από τον τύπο } \alpha_i = v_i \cdot \frac{360^\circ}{n}. \text{ Από υπόθεση } \alpha_1 = 50^\circ \text{ και } \alpha_i = v_i \cdot \frac{360^\circ}{n}.$$

Από την υπόθεση $\alpha_1 = 50^\circ$ και $\alpha_2 = 30^\circ$.

$$\alpha_1 = v_1 \cdot \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow 50^\circ = v_1 \cdot \frac{360^\circ}{72} \Leftrightarrow 50^\circ = v_1 \cdot 5^\circ \Leftrightarrow v_1 = 10 \text{ και}$$

$$\alpha_2 = v_2 \cdot \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow 30^\circ = v_2 \cdot \frac{360^\circ}{72} \Leftrightarrow 20^\circ = v_2 \cdot 5^\circ \Leftrightarrow v_2 = 6.$$

$$\text{Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι } v_4 = 3 \cdot v_3 \text{ άρα } v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = n \Leftrightarrow 10 + 6 + v_3 + 3 \cdot v_3 = 72 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 \cdot v_3 = 72 - 16 \Leftrightarrow 4 \cdot v_3 = 56 \Leftrightarrow v_3 = 14.$$

$$\beta). \text{ Για την τιμή } x_3 \text{ έχουμε : } \alpha_3 = v_3 \cdot \frac{360^\circ}{n} = 14 \cdot \frac{360^\circ}{72} = 14 \cdot 5^\circ = 70^\circ.$$

$$\text{Για την τιμή } x_4 \text{ έχουμε : } \alpha_4 = v_4 \cdot \frac{360^\circ}{n} = 42 \cdot \frac{360^\circ}{72} = 42 \cdot 5^\circ = 210^\circ.$$

γ). Δίνεται ότι $x_1 < -7, x_2 = -7, x_3 = 3, x_4 > 3$. Άρα ισχύει $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι : R μεγαλύτερη τιμή – μικρότερη τιμή = $x_4 - x_1$.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 + x_4 \cdot v_4}{n}$$

Από τα δεδομένα έχω :

$$t_1 = t_2 = \dots = t_{10} = x_1, \quad t_{11} = t_{12} = \dots = t_{16} = x_2, \quad t_{17} = t_{18} \dots = t_{30} = x_3,$$

$$t_{31} = t_{32} = \dots = t_{72} = x_4, \quad \text{άρα } t_{36} = t_{37} = x_4.$$

Η διάμεσος $\delta = \frac{t_{36} + t_{37}}{2}$ διότι (άρτιος), οπότε η μέση τιμή ισούται με το ημιάθροισμα των δύο

μεσαίων παρατηρήσεων. Άρα $\delta = \frac{x_4 + x_4}{2} = x_4$.

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην σχέση που ζητείται ναδειχθεί έχουμε :

$$\begin{aligned} 10 \cdot R + 72 \cdot \bar{x} &= 10 \cdot (x_4 - x_1) + 72 \cdot \frac{x_1 \cdot \nu_1 + x_2 \cdot \nu_2 + x_3 \cdot \nu_3 + x_4 \cdot \nu_4}{\nu} \\ &= 10 \cdot (x_4 - x_1) + 72 \cdot \frac{10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 + 42 \cdot x_4}{72} = 10 \cdot x_4 - 10 \cdot x_1 + 10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 + 42 \cdot x_4 = \\ &= 10 \cdot x_4 + 6 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 + 42 \cdot x_4 = 52 \cdot x_4 + 6 \cdot (-7) + 14 \cdot 3 = 52 \cdot x_4 = 52 \cdot \delta. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = v^3 \cdot x + \frac{4}{x^2}$, $x \in (0, 1)$, όπου v ακέραιος αριθμός με $v > 2$.

A). α). Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. Μονάδες 8

β). Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και ναδειχθεί ότι $f(x) \geq 3 \cdot v^2$, για κάθε $x \in (0, 1)$.

B). Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, \dots, v\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το ενδεχόμενο του, A για το οποίο ισχύει $v^3 \cdot P(A) + \frac{4}{[P(A)]^2} = 3 \cdot v^2$ και $N(A) = v^2 - 9 \cdot v - 8$,

όπου $P(A)$ είναι η πιθανότητα του A και $N(A)$ το πλήθος των στοιχείων του A .

α). Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{5}$. Μονάδες 7

β). Αν επιπλέον B είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω με $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα του ενδεχομένου $A' \cup B$. Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

A). α). Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με :

$$f'(x) = \left(v^3 \cdot x + \frac{4}{x^2} \right)' = v^3 \cdot x' + \left(\frac{4}{x^2} \right)' = v^3 + 4 \cdot x^{-2}' = v^3 + 4 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = v^3 - \frac{8}{x^3}, \quad x \in (0, 1).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow v^3 - \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow v^3 = \frac{8}{x^3} \Leftrightarrow v^3 \cdot x^3 = 8 \Leftrightarrow x \cdot v = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{v}.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow v^3 - \frac{8}{x^3} > 0 \Leftrightarrow v^3 > \frac{8}{x^3} \Leftrightarrow v^3 \cdot x^3 > 8 \Leftrightarrow x \cdot v > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{v}.$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow v^3 - \frac{8}{x^3} < 0 \Leftrightarrow v^3 < \frac{8}{x^3} \Leftrightarrow v^3 \cdot x^3 < 8 \Leftrightarrow x \cdot v < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{v}.$$

Αφού η $f'(x) < 0$ στο $\left(0, \frac{2}{v}\right)$, και η f συνεχής στο $\left[0, \frac{2}{v}\right]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{2}{v}\right]$.

Αφού η $f'(x) > 0$ στο $\left(\frac{2}{v}, 1\right)$ και η f συνεχής στο $\left[\frac{2}{v}, 1\right]$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{2}{v}, 1\right]$.

β). Ο πίνακας μεταβολών της f είναι :

x	0	2/n	1
f(x)		-	+
f'(x)			

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{2}{v}$. Με ελάχιστη τιμή το $f\left(\frac{2}{v}\right) = 3 \cdot v^2$.

Αφού η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f για κάθε $x \in (0, 1)$ ισούται με $f(x_0) = 3 \cdot v^2$, από τον ορισμό του ελαχίστου έχουμε ότι $f(x) \geq 3 \cdot v^2$, για κάθε $x \in (0, 1)$.

Β). α). Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε :

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{N(A)}{v} \Leftrightarrow P(A) = \frac{v^2 - 9v - 8}{v} \quad (1)$$

$$\text{Έχουμε ότι : } v^3 \cdot P(A) + \frac{4}{[P(A)]^2} = 3 \cdot v^2 \Leftrightarrow v^3 \cdot \frac{v^2 - 9v - 8}{v} + \frac{4}{\left[\frac{v^2 - 9v - 8}{v}\right]^2} = 3 \cdot v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 \cdot \frac{v^2 - 9v - 8}{v^2} + \frac{4}{\frac{(v^2 - 9v - 8)^2}{v^2}} = 3 \cdot v^2 \Leftrightarrow v^2 \cdot \frac{v^2 - 9v - 8}{v^2} + \frac{4v^2}{(v^2 - 9v - 8)^2} = 3 \cdot v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 - 9v - 8 + \frac{4}{v^2 - 9v - 8} = 3. \quad \text{Θέτουμε } v^2 - 9v - 8 = x \quad (2) \text{ όπου } x = N(A) > 0 \text{ και έχουμε :}$$

$$x + \frac{4}{x} = 3 \Leftrightarrow x^3 + 4 = 3 \cdot x^2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 - 3(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \cdot (x^2 - x + 1) - 3 \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot (x^2 - x + 1 - 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{x = 1 \text{ απορρίπτεται ή } x = 2\}. \text{ Οπότε η σχέση (2) για } x = 2 \text{ δίνει :}$$

$$v^2 - 9v - 8 = 2 \Leftrightarrow v^2 - 9v - 10 = 0 \Leftrightarrow (v-10) \cdot (v+1) = 0 \Leftrightarrow \{v = 10 \text{ ή } v = -1 \text{ απορρίπτεται}\}.$$

Αφού $v = N(\Omega) \in \mathbb{N}^*$.

Συνεπώς από την σχέση (1) για $v = 10$ προκύπτει η ζητούμενη πιθανότητα, δηλαδή :

$$P(A) = \frac{10^2 - 9 \cdot 10 - 8}{10} = \frac{100 - 98}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Α τρόπος

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B) +$$

$$P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{30}{30} - \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{29}{30}.$$

$$\text{Β τρόπος } P(A' \cup B) = P[(A \cap B)'] = P[(A - B)'] = 1 - P(A - B) = 1 - P(A) + P(A \cap B) =$$

$$= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{30}{30} - \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{29}{30}.$$

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΜΑΪΟΣ 2010 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

- A1). Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$.
Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_n - \bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν. [Μονάδες 7]
- A2). Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής X . [Μονάδες 4]
- A3). Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου. [Μονάδες 4]
- A4). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
α). Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικών αριθμούς, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

β). Για κάθε $x > 0$ ισχύει $\sqrt{x}' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
γ). Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $v(t_0) = f'(t_0)$.
δ). Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
ε). Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. [Μονάδες 10]

ΛΥΣΗ

A1). Απόδειξη στη σελ. 93

A2). Ορισμός στη σελ. 87

A3). Ορισμός στη σελ. 140

A4). α. $\rightarrow \Sigma$ β. $\rightarrow \Lambda$ γ. $\rightarrow \Sigma$ δ. $\rightarrow \Lambda$ ε. $\rightarrow \Lambda$ **ΘΕΜΑ Β**Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1, x \in \mathbb{R}$.

- B1). Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$ [Μονάδες 10]
- B2). Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$. [Μονάδες 10]
- B3). Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$. [Μονάδες 5]

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}
 \text{B1). } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - x + 1) - 2}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x \cdot x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cdot x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \\
 &= \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 - 1 + 1} + 1} = \frac{2}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\text{B2). } f'(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} \cdot x^2 - x + 1' = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $x_0 = 0$ είναι $f'(0) = \frac{-1}{\sqrt{-1}} = -1$.

$$\text{B3). } \epsilon\phi\omega = \lambda = f'(0) = -1, \text{ άρα } \omega = \frac{3\pi}{4}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα :

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i
[0 - ...)	...	20
[... - ...)	6	40
[... - ...)	...	45
[... - ...)	...	30
[... - ...)	...	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

Γ1). Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4. [Μονάδες 6]

Γ2). Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s . [Μονάδες 8]

Γ3). Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. [Μονάδες 5]

Γ4). Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου A : « η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά ». [Μονάδες 6]

$$\text{Δίνεται ο τύπος } s^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i \cdot \nu_i \right)^2}{\nu} \right].$$

ΛΥΣΗ

Γ1). Η πρώτη κλάση είναι $[a, a + c]$ και η δεύτερη $[a + c, a + 2 \cdot c]$, άρα $a = 0$.

$$\text{και } \frac{a + c + a + 2c}{2} = 6 \Rightarrow 2 \cdot a + 3 \cdot c = 12 \Rightarrow 3 \cdot c = 12 \Rightarrow c = 4.$$

Γ2).

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i	$x_i \cdot \nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i$
[0 - 4)	2	20	40	-8	64	1280
[4 - 8)	6	40	240	-4	16	640
[8 - 12)	10	45	450	0	0	0
[12 - 16)	14	30	420	4	16	480
[16 - 20)	18	25	450	8	64	1600
ΣΥΝΟΛΟ		160	1600			4000

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{1600}{160} = 10, \quad s^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot \nu_i - \bar{x}^2 = \frac{4.000}{160} = 25, \quad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\text{Γ3). } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50 \%, \text{ άρα δεν είναι ομοιογενές.}$$

Γ4). Κατά την ομαδοποίηση των παρατηρήσεων, θεωρούμε ότι τα στατιστικά δεδομένα κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση. Στην κλάση [4, 8) αντιστοιχούν 40 άτομα, άρα κατ' αναλογία στο τμήμα της [7, 8) θα αντιστοιχούν 10 άτομα.

Στην κλάση [12, 16) αντιστοιχούν 30 άτομα, άρα στο τμήμα της [12, 14] αντιστοιχούν 15 άτομα.

Οπότε, $10 + 45 + 15 = 70$ άτομα είχαν απώλεια βάρους από 7 μέχρι και 14 κιλά.

Επειδή κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί για να υπολογίσουμε την

$$\text{πιθανότητα, χρησιμοποιούμε τον κλασικό ορισμό : } P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega} = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A), P(B)$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2} \cdot (x - P(A))^2 + P(B)$, $x > P(A)$.

Δ1). Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. [Μονάδες 13]

Δ2). Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = \frac{5}{3}$, με τιμή $f(x_0) = 0$, να αποδείξετε

$$\text{ότι : } P(A) = \frac{2}{3} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2}. \quad [\text{Μονάδες 2}]$$

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα Δ2 και επιπλέον ότι $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα :

Δ3). να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A, B . [Μονάδες 5]

Δ4). να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A, B . [Μονάδες 5]

ΛΥΣΗ

$$\Delta 1). f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2} \cdot (x - P(A))^2 + P(B), x > P(A).$$

$$f'(x) = \frac{1}{x - P(A)} \cdot x - P(A) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x - P(A) \cdot x - P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x - P(A)} - x - P(A) \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - (x - P(A))^2}{x - P(A)}, x > P(A).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - (x - P(A))^2}{x - P(A)} = 0 \Rightarrow 1 - (x - P(A))^2 = 0 \Rightarrow (x - P(A))^2 = 1 \Rightarrow x = 1 + P(A).$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{1 - (x - P(A))^2}{x - P(A)} > 0 \Rightarrow 1 - (x - P(A))^2 > 0. \quad [x > P(A)]$$

X	P(A)	1 + P(A)	+∞
f'	+	-	
f			

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(P(A), 1 + P(A)]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1 + P(A), +\infty)$.

$$\text{Παρουσιάζει για } x = 1 + P(A) \text{ ολικό μέγιστο } f(1 + P(A)) = \ln 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + P(B) = P(B) = \frac{1}{2}.$$

$$\Delta 2). \text{Επειδή η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο } x_0 = 1 + P(A) \text{ είναι } 1 + P(A) = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{3} \text{ και η τιμή του ακρότατου είναι } f(1 + P(A)) = P(B) - \frac{1}{2}, \text{ άρα } P(B) - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$P(B) = \frac{1}{2}.$$

$$\Delta 3). P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B), \text{ άρα}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{4+3-5}{6} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}.$$

Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα A, B αντιστοιχεί στο $(A \cap B)'$.

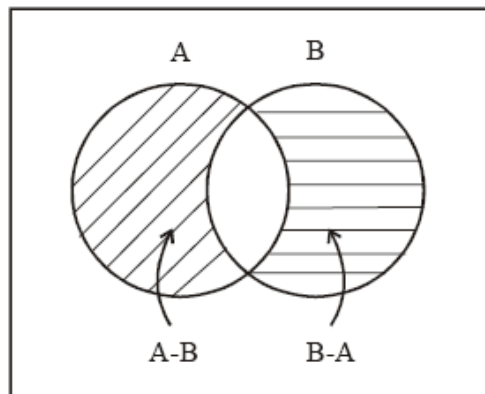
$$P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Δ4). Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A, B αντιστοιχεί στο $(A - B) \cup (B - A)$.

$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$, οπότε από τον απλό προσθετικό νόμο

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ ΤΑΞΗΣ
ΙΟΥΛΙΟΣ 2010 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1). Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι
 $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$, $x \in \Delta$. Μονάδες 9
- A2). Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;
Μονάδες 3
- A3). Πώς ορίζεται ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ;
Μονάδες 3
- A4). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α). Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το A , τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντα πεδίο ορισμού το A .
- β). Ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} (\text{συν} x) = \text{συν} x_0$.
- γ). Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους οι διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.
- δ). Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος.
- ε). Αν $P(A)$ είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, τότε
 $P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$. Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

- A1). Απόδειξη σχ. βιβλίο, σελ. 30. A2). Ορισμός σχ. βιβλίο, σελ. 13.
 A3). Ορισμός σχ. βιβλίο, σελ. 139. A4). α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί 60 μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών κυμαίνονται από 10 έως 20 και έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Αν :

→ Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην κλάση $[14, 16)$ του κυκλικού διαγράμματος είναι 144° .

→ Οι σχετικές συχνότητες των δύο πρώτων κλάσεων είναι ίσες.

→ 48 μαθητές πήραν βαθμό έως 16 και

→ 6 μαθητές πήραν βαθμό τουλάχιστον 18, τότε :

B1). Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα σωστά συμπληρωμένο.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ [-)	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΙΜΗ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ n_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i %
ΣΥΝΟΛΟ				

Μονάδες 10

B2). Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της βαθμολογίας των μαθητών.	Μονάδες 6
B3). Να βρείτε πόσοι μαθητές πήραν βαθμολογία από 10 έως 14.	Μονάδες 4
B4). Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμολογία τουλάχιστον 17.	Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

$v = 60$, X : «βαθμολογία», $t_{\min} = 10$, $t_{\max} = 20$, $\kappa = 5$ κλάσεις.

$$B1). R = t_{\max} - t_{\min} = 20 - 10 = 10, c = \frac{R}{\kappa} = 2,$$

οι κλάσεις θα είναι : [10, 12), [12, 14), [14, 16), [16, 18), [18, 20)

Με κεντρικές τιμές : 11, 13, 15, 17, 19. από τα δεδομένα προκύπτουν τα εξής :

$$\rightarrow \alpha_3^0 = 144^\circ \quad (1) \quad \rightarrow f_1 = f_2 \quad (2) \quad \rightarrow v_1 + v_1 + v_3 = 48 \quad (3) \quad \rightarrow v_5 = 6.$$

$$(1) \Rightarrow f_3 \cdot 360^\circ = 144^\circ \Leftrightarrow f_3 = \frac{144}{360} \Leftrightarrow f_3 = 0,40.$$

$$f_3 \% = f_3 \cdot 100 \Rightarrow f_3 \% = 40 \%, \quad f_3 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow f_3 \cdot v = 0,4 \cdot 60 \Leftrightarrow v_3 = 24.$$

$$(2) \Rightarrow \frac{v_1}{v} = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow v_1 = v_2. \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow v_1 + v_2 + 24 = 48 \Leftrightarrow 2 \cdot v_1 = 24 \Leftrightarrow v_1 = 12 = v_2.$$

$$(2) \Rightarrow f_2 = 0,2, \quad \text{και} \quad f_1 \% = f_2 \% = f_1 \cdot 100 = 0,2 \cdot 100 \Leftrightarrow f_1 \% = f_2 \% = 20 \%.$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \Leftrightarrow v_4 = 60 - (v_1 + v_2 + v_3 + v_5) \Leftrightarrow v_4 = 60 - (12 + 12 + 24 + 6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_4 = 60 - 54 \Leftrightarrow v_4 = 6. \quad \text{άρα} \quad f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} \Rightarrow f_4 = 0,1, \text{ και}$$

$$f_4 \% = f_4 \cdot 100 = 0,1 \cdot 100 \Rightarrow f_4 = 10\%.$$

και αφού και $v_5 = 6$ προκύπτει : $f_5 = 0,1 \cdot f_5 = 10 \%$, άρα ο πίνακας συμπληρωμένος είναι :

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ [-)	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΙΜΗ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i %
[10 - 12)	11	12	0,2	20
[12 - 14)	13	12	0,2	20
[14 - 16)	15	24	0,4	40
[16 - 18)	17	6	0,1	10
[18 - 20)	19	6	0,1	10
ΣΥΝΟΛΟ	—	60	1	100

$$x_1 \cdot v_1 = 11 \cdot 12 = 132, \quad x_2 \cdot v_2 = 13 \cdot 12 = 156, \quad x_3 \cdot v_3 = 15 \cdot 24 = 360, \quad x_4 \cdot v_4 = 17 \cdot 6 = 102, \quad x_5 \cdot v_5 = 19 \cdot 6 =$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i = 132 + 156 + 360 + 102 + 114 = 864.$$

$$\text{άρα η μέση τιμή θα είναι : } \bar{x} = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i = \frac{864}{60} \Leftrightarrow \bar{x} = 14,4.$$

B3). Βαθμολογία από 10 έως 14 πήραν $v_1 + v_2 = 12 + 12 = 24$ μαθητές.

B4). Το 17 είναι η κεντρική τιμή της 4ης κλάσης οπότε βαθμολογία τουλάχιστον 17 αντιστοιχεί στη μισή 4^η κλάση και όλη την 5^η. Αφού οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα (και συμμετρικά) κατανομημένες σε κάθε κλάση, το ζητούμενο ποσοστό είναι :

$$\frac{f_4\%}{2} + f_5\% = \frac{10\%}{2} + 10\% = 15\% \text{ των μαθητών.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενά του

$A = \{\omega_1, \omega_3\}$ και $B = \{\omega_2, \omega_4\}$. Αν είναι $P(A - B) = \frac{\nu+1}{\nu+4}$ και $P(B - A) = \frac{\nu-1}{2\nu}$, όπου ν θετικός

ακέραιος, τότε :

Γ1). Να αποδείξετε ότι $P(A - B) = P(A)$ και $P(B - A) = P(B)$.

Μονάδες 6

Γ2). Να αποδείξετε ότι $\nu = 4$.

Μονάδες 10

Γ3). Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B .

Μονάδες 4

Γ4). Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A' \cup B'$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, A = \{\omega_1, \omega_3\}, B = \{\omega_2, \omega_4\}, P(A - B) = \frac{\nu+1}{\nu+4}, P(B - A) = \frac{\nu-1}{2\nu}.$$

Γ1). $(A - B) = \{\omega_1, \omega_3\} = A$, άρα: $P(A - B) = P(A)$.

2^{ος} τρόπος

$A \cap B = \emptyset$, οπότε $P(A \cap B) = 0$, άρα $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A - B) = P(A)$.

Ομοίως : $B - A = \{\omega_2, \omega_4\} = B$, άρα : $P(B - A) = P(B)$ ή $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B)$.

Γ2). Από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας ισχύει :

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \quad (1)$$

$$P(A - B) = P(A) \Leftrightarrow P(A) = \frac{\nu+1}{\nu+4} \Leftrightarrow P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{\nu+1}{\nu+4} \quad (2)$$

$$P(B - A) = P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{\nu-1}{2\nu} \Leftrightarrow P(\omega_2) + P(\omega_4) = \frac{\nu-1}{2\nu} \quad (3)$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\nu+1}{\nu+4} + \frac{\nu-1}{2\nu} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \nu \cdot (\nu+1) + (\nu+4) \cdot (\nu-1) = 2 \cdot \nu \cdot (\nu+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \nu^2 + 2 \cdot \nu + \nu^2 - \nu + 4 \cdot \nu - 4 = 2 \cdot \nu^2 + 8 \cdot \nu \Leftrightarrow \nu^2 - 3 \cdot \nu - 4 = 0 \Leftrightarrow (\nu+1) \cdot (\nu-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\nu = -1 \text{ ή } \nu = 4 \text{ όμως } \nu \in \mathbb{Z}^+ \} \Rightarrow \nu = 4.$$

$$\Gamma 3). P(A) = \frac{\nu+1}{\nu+4} = \frac{4+1}{4+4} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{8}, P(B) = \frac{\nu-1}{2\nu} = \frac{4-1}{2 \cdot 4} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}.$$

Γ4). $A' \cup B' = (A \cap B)'$, άρα $P(A' \cup B') = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0 = 1$.

Δηλαδή : $P(A' \cup B') = 1 = P(\Omega)$.

2^{ος} τρόπος

$A' = \{\omega_2, \omega_4\} = B$ οπότε : $A' \cup B' = B \cup B' = \Omega$ άρα : $P(A' \cup B') = P(\Omega) = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση S .

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{300 \cdot S^2} \cdot (t - \bar{x})^3$, $t \in \mathbb{R}$ και $S \neq 0$.

Δ1). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Μονάδες 5

Δ2). Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος για $t = \bar{x}$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του. Μονάδες 6

Δ3). Αν $f'(0) = 1$, να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV των παραπάνω παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Μονάδες 8

Δ4). Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των αριθμών $f'(t_1), f'(t_2), \dots, f'(t_n)$ είναι ίση με $\frac{1}{100}$.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

Δ1). $f(t) = \frac{1}{300 \cdot S^2} \cdot t - \bar{x}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $S \neq 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με: $f'(t) = \frac{1}{300 \cdot S^2} \cdot [t - \bar{x}^3]' = \frac{3}{300 \cdot S^2} \cdot t - \bar{x}^2 \cdot t - \bar{x}' =$

Άρα $f'(t) = \frac{1}{100 \cdot S^2} \cdot t - \bar{x}^2$. Έχουμε $f'(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, (αφού $\frac{1}{100 \cdot S^2} > 0$, $t - \bar{x}^2 \geq 0$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2). Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι η f' . Η $f'(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$f''(t) = \frac{1}{100 \cdot S^2} \cdot [t - \bar{x}^2]' = \frac{2}{100 \cdot S^2} \cdot t - \bar{x} \cdot t - \bar{x}' \Rightarrow f''(t) = \frac{1}{50 \cdot S^2} \cdot t - \bar{x}$, όπου $\frac{1}{50 \cdot S^2} > 0$.

$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{20 \cdot S^2} \cdot (t - \bar{x}) = 0 \Rightarrow t = \bar{x}$.

$f''(t) > 0 \Leftrightarrow t - \bar{x} > 0 \Leftrightarrow t > \bar{x}$.

$f(t) < 0 \Leftrightarrow t < \bar{x} \Leftrightarrow t < \bar{x}$.

t	$-\infty$	$\bar{x}$	$+\infty$
$f''(t)$		-	+
$f'(t)$			

Αφού $f'(\bar{x}) = 0$, και $f'(\bar{x}) < 0$ στο $(-\infty, \bar{x})$ και $f'(\bar{x}) > 0$ στο $(\bar{x}, +\infty)$. Συμπεράνουμε ότι:

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $t = \bar{x}$. με ελάχιστη τιμή: $f'(\bar{x}) = \frac{1}{100 \cdot S^2} \cdot \bar{x} - \bar{x} \Rightarrow f'(\bar{x}) = 0$.

Δ3). $f'(0) = \frac{1}{100 \cdot S^2} \cdot 0 - \bar{x}^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}}{100 \cdot S^2} = 1 \Leftrightarrow \bar{x}^2 = 100 \cdot S^2 \Leftrightarrow \frac{S^2}{\bar{x}^2} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{|S|}{|\bar{x}|} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow CV = 0,1$. αφού $CV = 0,1$ ή 10% το δείγμα είναι οριακά ομοιογενές.

Δ4). Η μέση τιμή των $f'(t_1), f'(t_2), \dots, f'(t_n)$ είναι:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{f'(t_1) + f'(t_2) + \dots + f'(t_n)}{n} = \frac{\frac{1}{100 \cdot S^2} \cdot t_1 - \bar{x}^2 + \frac{1}{100 \cdot S^2} \cdot t_2 - \bar{x}^2 + \dots + \frac{1}{100 \cdot S^2} \cdot t_n - \bar{x}^2}{n} = \\ &= \frac{1}{100 \cdot S^2} \cdot \frac{t_1 - \bar{x}^2 + t_2 - \bar{x}^2 + \dots + t_n - \bar{x}^2}{n} = \frac{1}{100 \cdot S^2} \cdot S^2 \Leftrightarrow \bar{y} = \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΜΑΪΟΥ 2011 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1). Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι :
 $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. Μονάδες 7
- A2). Πότε δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα ; Μονάδες 4
- A3). Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα f_i μιας παρατήρησης x_i ενός δείγματος. Μονάδες 4
- A4). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α). Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις. Μονάδες 2
- β). Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R \approx 6 \cdot \bar{x}$. Μονάδες 2
- γ). Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Μονάδες 2
- δ). Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα. Μονάδες 2
- ε). Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10 %. Μονάδες 2

ΛΥΣΗ

A1). Θεωρία σελ.152.

A2). Δύο ενδεχόμενα A, B λέγονται ενός δειγματικού χώρου Ω ασυμβίβαστα όταν $A \cap B = \emptyset$.

A3). Θεωρία σελ.65, σχολικού βιβλίου. Η σχετική συχνότητα της παρατήρησης x_i , ενός δείγματος, προκύπτει από τον λόγο $f_i = \frac{v_i}{n}$, όπου v_i είναι η συχνότητα της παρατήρησης x_i προς το μέγεθος n

του δείγματος. Έτσι αν πολλαπλασιαστεί επί 100 εκφράζει την ποσοστιαία εμφάνιση της παρατήρησης x_i σε σχέση με το μέγεθος του δείγματος.

A4). α). Λ β). Λ γ). Σ δ). Λ ε). Σ

ΘΕΜΑ Β

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα.

Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M) = \frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(A) = 4 \cdot \lambda^2$

και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K) = -5 \cdot \lambda + \frac{7}{4}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει $64 < N(\Omega) < 72$, τότε

- B1). Να δείξετε ότι $N(\Omega) = 68$. Μονάδες 6
- B2). Να υπολογιστεί η τιμή του λ . Μονάδες 8
- B3). Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί. Μονάδες 6
- B4). Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη. Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

$$B1). P(M) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(M) = 4 \cdot N(\Omega).$$

$$\text{Οπότε } 64 < N(\Omega) < 72 \Leftrightarrow 64 < 4 \cdot N(M) < 72 \Leftrightarrow \frac{64}{4} < N(M) < \frac{72}{4} \Leftrightarrow 16 < N(M) < 18.$$

$$\text{Άρα } N(M) = 17. \text{ Άρα } N(\Omega) = 4 \cdot 17 = 68.$$

$$B2). P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{N(A)}{68} \Leftrightarrow N(A) = 68 \cdot P(A) = 68 \cdot 4 \cdot \lambda^2.$$

$$P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(K) = \frac{N(K)}{68} \Leftrightarrow N(K) = 68 \cdot P(K) = 68 \cdot \left(-5\lambda + \frac{7}{4}\right).$$

$$P(M) = \frac{N(M)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(M) = 68 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα } N(A) + N(K) + N(M) = N(\Omega) \Rightarrow 68 \cdot 4 \cdot \lambda^2 + 68 \cdot \left(-5\lambda + \frac{7}{4}\right) + 68 \cdot \frac{1}{4} = 68 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0.$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8} \Rightarrow \{\lambda_1 = 1 \text{ ή } \lambda = 1/4\}.$$

B ΤΡΟΠΟΣ

$$P(A) + P(K) + P(M) = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9 > 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8} \Rightarrow \{\lambda_1 = 1 \text{ ή } \lambda = 1/4\}.$$

Για $\lambda = 1$, έχουμε : $P(A) = 4 \cdot \lambda^2 = 4 > 1$ άτοπο.

$$\text{Για } \lambda = \frac{1}{4}, \text{ έχουμε : } P(A) = 4 \cdot \lambda^2 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}, \quad P(K) = -1 + \frac{7}{4} = -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(M) = \frac{1}{4}.$$

B3). Στο κουτί υπάρχουν :

$$N(A) = P(A) \cdot N(\Omega) = \frac{1}{4} \cdot 68 = 17 \text{ άσπρες σφαίρες.}$$

$$N(K) = P(K) \cdot N(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot 68 = 34 \text{ κόκκινες σφαίρες } N(M) = P(M) \cdot N(\Omega) = 17 \text{ μαύρες σφαίρες}$$

B4). Επιλέγουμε μια σφαίρα τυχαία. Η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη είναι :

$$P(A \cup M) = P(A) + P(M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ έχει διαδοχικές κορυφές τις : $A(8, 0)$, $B(10, 10)$, $\Gamma(12, 20)$, $\Delta(14, y_\Delta)$, $E(16, y_E)$, $Z(18, 10)$, $H(20, 0)$, όπου y_Δ , y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και E του πολυγώνου $AB\Gamma\Delta EZH$.

- Γ1). Να υπολογιστούν οι τεταγμένες y_Δ και y_E των κορυφών Δ και E , αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14.200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔE είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα. Μονάδες 7
- Γ2). Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$. Μονάδες 3
- Γ3). Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους. Μονάδες 7
- Γ4). Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15.000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό. Μονάδες 4
- Γ5). Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Γ4 ερώτημα. Μονάδες 4

ΛΥΣΗ

Γ1). $A(8, 0)$, $B(10, 16)$, $\Gamma(12, 20)$, $\Delta(14, y_\Delta)$, $E(16, y_E)$, $Z(18, 10)$, $H(20, 0)$

$$\bar{x} = 14,2.$$

$$\Delta E \parallel x x' \Rightarrow y_\Delta = y_E.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^5 x_i \cdot \nu_i = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot f_i \Leftrightarrow 14,2 = 10 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 14 \cdot \frac{y_\Delta}{100} + 16 \cdot \frac{y_E}{100} + 18 \cdot 0,1$$

$$\Leftrightarrow 14,2 = 1 + 2,4 + 0,3 \cdot y_\Delta + 1,8 \Leftrightarrow 14,2 - 5,2 = 0,3 \cdot y_\Delta \Leftrightarrow 9 = 0,3 \cdot y_\Delta \Leftrightarrow y_\Delta = y_E = 30.$$

Β τρόπος

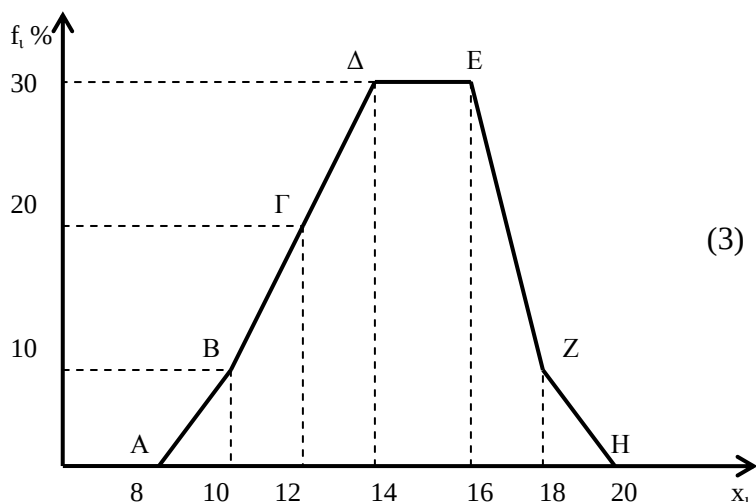
$$\text{Έχουμε } \sum_{i=1}^{\nu} f_i = 100 \Leftrightarrow 10 + 20 + f_3 + f_4 + 10 = 100.$$

$$\text{Όμως } y_\Delta = y_E \Rightarrow f_3\% = f_4\%, \text{ άρα } 2 \cdot f_3\% = 60 \Rightarrow f_3\% = 30\% \text{ άρα } f_3 = f_4 = 30\%.$$

$$\Gamma 2). x_B - x_A = c \Leftrightarrow c = 2.$$

1^η κλάση $[a, \beta)$ όπου

$$a \Rightarrow x_B - c = 10 - \frac{2}{2} = 9.$$



Γ3)

Κλάσεις σε χιλ.€ [-, -)	Σχετ.συχνοτ f_i %
9 – 12	10
11 – 13	20
13 – 15	30
15 – 17	30
17 – 19	10
Σύνολο	100

Γ4).

Οι πωλητές που θα πάρουν την χορήγηση του επιπλέον εφάπαξ είναι: Για $x > 15$ έχουμε :

$$f_4 \% + f_5 \% = 30 \% + 10 \% = 40 \%$$

Γ5). $v = 80$.

$$f_1 = \frac{v_1}{v} \Rightarrow 0,10 = \frac{v_1}{80} \Rightarrow v_1 = 8.$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Rightarrow 0,20 = \frac{v_2}{80} \Rightarrow v_2 = 16.$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Rightarrow 0,30 = \frac{v_3}{80} \Rightarrow v_3 = 24.$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Rightarrow 0,30 = \frac{v_4}{80} \Rightarrow v_4 = 24.$$

$$f_5 = \frac{v_5}{v} \Rightarrow 0,10 = \frac{v_5}{80} \Rightarrow v_5 = 8. \text{ Άρα, οι πωλητές που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό είναι } 24+8=32.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{3}x \left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5} \right)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1). Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2). Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και $P(A), P(B)$ είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cap B), P(A - B), P(A \cup B), P(B - A)$.

Μονάδες 8

Δ3). Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = e^{\frac{1}{5}x \left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3} \right)}$, $x \in \mathbb{R}$.

α). Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = h(x)$.

Μονάδες 3

β). Αν $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $v_i = 2 \cdot x_i + 1$, $i = 1, 2, 3$ οι συχνότητες των παρατηρήσεων x_i τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

$$\text{Έχουμε } f(x) = e^{\frac{1}{3}x \left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5} \right)} = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Η } f \text{ παραγωγίσιμη με } f'(x) = \left(e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} \right)' = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x \right)'$$

$$\text{Άρα } f'(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} \cdot \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} \right)$$

$$\text{Επειδή ισχύει } e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} > 0, \text{ επομένως } f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} = 0 \Rightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0$$

$$\Delta = 11^2 - 4 \cdot 15 \cdot 2 = 121 - 120 = 1 > 0. \text{ Άρα } x_{1,2} = \frac{11 \pm 1}{30} = \begin{cases} x_1 = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \\ x_2 = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \end{cases}, \text{ ισχύει } \frac{1}{3} < \frac{2}{5}.$$

X $-\infty$

1/3

2/5

$+\infty$ f

'(x) + -

$-\infty$ 1/

3

2/5

$+\infty$ f

'(x) + -

f

'(x) + -

f

'(x) + -

+ - + f

(x)

- + f(x)

max

min

+ f(x)

f(x)

f(x)

max

min

↗

max

min

↗ ↘

max

min

max

min

max

min

→ Για $x \in (-\infty, 1/3]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

→ Για $x \in [1/3, 2/5]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

→ Για $x \in [2/5, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

X $-\infty$

1/3

2/5

 $+\infty$ f $f'(x)$ + - $-\infty$ 1/

3

2/5

 $+\infty$ f $f'(x)$ + -

f

 $f'(x)$ + -

f

 $f'(x)$ + -

+ - + f

(x)

- + f(x)



max

min

+

f(x)

f(x)

f(x)

max

min

↗

max

min

✗

max

min

max

min

max

min

max

min

→ Για $x \in (-\infty, 1/3]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

→ Για $x \in [1/3, 2/5]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

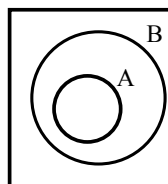
→ Για $x \in [2/5, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2). Ισχύει $A \subseteq B$ άρα $P(A) \leq P(B)$. Οι θέσης που η f παρουσιάζει ακρότατο είναι

$x = \frac{1}{3}$ και $x = \frac{2}{5}$, $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$ οπότε $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$.

Έχουμε
 όμως $A \subseteq B$
 οπότε
 προκύπτει :
 $A \cup B = B \Rightarrow$
 $P(A \cup B) =$
 $P(B) = \frac{2}{5}$.
 $A \cap B = A \Rightarrow$
 $P(A \cap B) =$
 $P(A) =$

$$\frac{1}{3}.$$



$$\begin{aligned} P(A - B) &= P(A) - \\ P(A \cap B) &= \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} &= 0. \end{aligned}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}.$$

$$\Delta 3). \alpha). h(x) = e^{\frac{1}{5} \cdot x \cdot \left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3} \right)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{5} \cdot x \cdot \left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3} \right)} = e^{\frac{1}{3} \cdot x \cdot \left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5} \right)} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot x \cdot \left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot x \cdot \left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3} \right) = 5 \cdot x \cdot \left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5} \right) \Leftrightarrow 3 \cdot x \cdot \left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3} \right) - 5 \cdot x \cdot \left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{9x^2}{2} - 3x - 1 - 5x^2 + \frac{11}{2}x - 2 \right) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x - 3 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cdot x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι } x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 3.$$

$$\Delta 3). \beta). \text{ επειδή } x_1 < x_2 < x_3, \text{ έχουμε : } x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 3$$

$$\text{Άρα } v_1 = 2 \cdot x_1 + 1, v_2 = 2 \cdot x_2 + 1, v_3 = 2 \cdot x_3 + 1 \text{ και } v_1 = 1, v_2 = 5, v_3 = 7.$$

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
0	1	0
2	5	10
3	7	21
Σύνολα	13	31

$$\text{Άρα } \bar{x} = \frac{31}{13}.$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1). Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Μονάδες 7

A2). Έστω ένας δειγματικός χώρος Ω = {ω₁, ω₂, ..., ω_n} με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

Μονάδες 4

- A3). Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της A ; Μονάδες 4
- A4). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α). Αν $x > 0$, τότε $(x)' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- β). Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- γ). Η αθροιστική συχνότητα N_i μίας κατανομής εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .
- δ). Στην κανονική κατανομή το 95 % περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και S η τυπική απόκλιση.
- ε). Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται πάντα ως η μεσαία παρατήρηση. Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

A1). Σχολικό βιβλίο, σελίδα 151.

A2). Σχολικό βιβλίο, σελίδα 149.

A3). Σχολικό βιβλίο, σελίδα 22.

A4). α). Λάθος β). Σωστό γ). Σωστό δ). Λάθος ε). Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε $^{\circ}\text{C}$) σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t) = t - 4\sqrt{t} + \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $t \in (0, 24]$ ο χρόνος σε ώρες.

- B1). Να αποδείξετε ότι για $t \in (0, 4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t \in (4, 24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται. Μονάδες 7
- B2). Να υπολογίσετε την τιμή του α , αν γνωρίζετε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι -1°C . Μονάδες 6
- B3). Για $\alpha = 3$, να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της περιοχής είναι 0°C . Μονάδες 5
- B4). Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{\theta'(t)}{t^2 - 16}$. Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

$$B1). \theta'(t) = (t - 4\sqrt{t} + \alpha)' = 1 - \frac{2}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}}, t \in (0, 24].$$

$$\rightarrow \theta'(t) < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} - 2 < 0 \Leftrightarrow t < 4. \text{ Άρα η θερμοκρασία μειώνεται για } t \in (0, 4].$$

$$\rightarrow \theta'(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} - 2 > 0 \Leftrightarrow t > 4. \text{ Άρα η θερμοκρασία αυξάνεται για } t \in (4, 24].$$

$$B2). \theta_{\min} = \theta(4) \Leftrightarrow -1 = \alpha - 4 \Leftrightarrow \alpha = 3.$$

$$B3). \theta(t) = 0 \Leftrightarrow t - 4\sqrt{t} + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \{x = 1 \text{ ή } x = 3\} \Leftrightarrow \{t = 1 \text{ ή } t = 9\}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{B4). } \lim_{t \rightarrow 4} \frac{\theta' \cdot t}{t^2 - 16} &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t} \cdot t^2 - 16} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t - 4}{\sqrt{t} \cdot t - 4} \cdot \frac{t + 4}{\sqrt{t} + 2} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{t} \cdot t + 4 \cdot \sqrt{t} + 2} = \frac{1}{64}.
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια εταιρεία έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

ΗΛΙΚΙΕΣ (χρόνια)	x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$	$x_i \cdot v_i$
[25,)			x			
[,)			x + 20			
[,)			2·x			
[,)			$x^2 - 6 \cdot x$	50		
Σύνολο						

Γ1). Να βρεθούν οι σχετικές συχνότητες $f_i \%$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Μονάδες 6

Γ2). Αν η διάμεσος της κατανομής των ηλικιών είναι $\delta = 50$ χρόνια, να αποδείξετε ότι το πλάτος της κλάσης είναι $c = 10$.

Μονάδες 8

Γ3). Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα συμπληρωμένο κατάλληλα, να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ των ηλικιών.

Μονάδες 6

Γ4). Πόσοι εργαζόμενοι, των οποίων οι ηλικίες ανήκουν στην πρώτη κλάση, πρέπει να προσληφθούν, ώστε η νέα μέση ηλικία να είναι 40 χρόνια ;

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

$$\Gamma 1). \sum f_i \% = 100\% \Leftrightarrow x + x + 20 + 2 \cdot x + x^2 - 6 \cdot x = 100 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x - 80 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{ x = 10 \text{ ή } x = -8 \text{ απορρίπτεται} \}.$$

Άρα $f_1 \% = 10 \%$, $f_2 \% = 30 \%$, $f_3 \% = 20 \%$ και $f_4 \% = 40 \%$.

Γ2).

Κλάσεις	$f_i \%$	$F_i \%$
[25, 15 + c]	10	10
[25 + c, 25 + 2·c]	30	40
[25 + 2·c, 25 + 3·c]	20	60
[25 + 3·c, 25 + 4·c]	40	100
Σύνολο	100	—

Κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων

ΘΕΜΑ Δ

Εξακόσιοι απόφοιτοι Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, οι οποίοι έχουν τα ίδια τυπικά και ουσιαστικά προσόντα, υποβάλλουν αίτηση πρόσληψης σε δύο εταιρείες Α και Β. Δίνεται ότι η πιθανότητα, ένας τυχαία επιλεγμένος από αυτούς:

→ να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε μια μόνο από τις εταιρείες Α και Β είναι $\frac{\lambda+1}{3 \cdot \lambda}$, $\lambda \neq 0$.

→ να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη το πολύ σε μια από τις εταιρείες Α και Β είναι $\frac{3\lambda-1}{3 \cdot \lambda}$,

$$\lambda \neq 0$$

→ να μην κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε καμία από τις δύο εταιρείες είναι $\frac{1}{\lambda-2}$, $\lambda \neq 2$.

Δ1). Να αποδείξετε ότι $\lambda = 4$.

Μονάδες 8

Δ2). Από τους 600 αποφοίτους που υπέβαλαν αίτηση πρόσληψης στις εταιρείες Α και Β, η εταιρεία Α έκρινε κατάλληλους για πρόσληψη 50 λιγότερους από όσους έκρινε η εταιρεία Β.

α). Πόσοι απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη μόνο από την εταιρεία Α, πόσοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη μόνο από την εταιρεία Β και πόσοι απόφοιτοι θα βρεθούν στο δίλημμα να επιλέξουν σε ποια από τις δύο εταιρείες στις οποίες κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, επιθυμούν να εργαστούν ;

Μονάδες 7

β). Να αποδείξετε ότι 300 απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, από τις εταιρείες Α ή Β.

Μονάδες 6

Δ3). Στους αποφοίτους που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη δίνεται η δυνατότητα παρακολούθησης προγράμματος επιμόρφωσης. Αν η πιθανότητα εύρεσης εργασίας για αυτούς που θα παρακολουθήσουν το πρόγραμμα είναι διπλάσια από την αντίστοιχη εκείνων που δεν θα το παρακολουθήσουν, να υπολογίσετε πόσοι απόφοιτοι από αυτούς, που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, θα βρουν εργασία.

Μονάδες 4

ΛΥΣΗ

$$\Delta 1). P((A - B) \cup (B - A)) = \frac{\lambda+1}{3\lambda}.$$

$$P((A \cap B)') = \frac{3\lambda-1}{3\lambda} \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - \frac{3\lambda-1}{3\lambda} = \frac{1}{3\lambda}.$$

$$P((A \cup B)') = \frac{1}{\lambda-2} \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{\lambda-2} = \frac{\lambda-3}{\lambda-2}.$$

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ = P(A \cup B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda+1}{3\lambda} = \frac{\lambda-3}{\lambda-2} - \frac{1}{3\lambda} \Leftrightarrow \frac{\lambda+2}{3\lambda} = \frac{\lambda-3}{\lambda-2} \Leftrightarrow 3 \cdot \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 4 \Leftrightarrow 2 \cdot \lambda^2 - 9 \cdot \lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{ \lambda = 4 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2} \text{ απορρίπτεται, αφού } P((A \cup B)') < 0 \} \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

$$\Delta 2). \alpha). \text{ Για } \lambda = 4, \text{ είναι } P(A \cup B) = \frac{1}{2} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{12}.$$

$$N(A) = N(B) - 50 \quad (1)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{N(A)}{600} + \frac{N(B)}{600} - \frac{1}{12} \Rightarrow 300 = N(A) + N(B) - 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(A) + N(B) - 50 = 300 \Rightarrow N(B) - 50 + N(B) - 50 = 300 \Rightarrow N(B) = 200 \text{ και } P(B) = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}.$$

$$(1) \Rightarrow N(A) = 150 \text{ και } P(A) = \frac{150}{600} = \frac{1}{4}.$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{N(A - B)}{600} = \frac{1}{6} \Rightarrow N(A - B) = 100, \text{ άρα}$$

100 κρίθηκαν κατάλληλοι μόνο από την εταιρεία Α.

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{N(B - A)}{600} = \frac{1}{4} \Rightarrow N(B - A) = 150, \text{ άρα}$$

150 κρίθηκαν κατάλληλοι μόνο από την εταιρεία Β.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{N(A \cap B)}{600} = \frac{1}{12} \Rightarrow N(A \cap B) = 50, \text{ άρα}$$

50 κρίθηκαν κατάλληλοι και από τις δύο εταιρείες και θα βρεθούν στο δίλλημα να επιλέξουν σε ποια από τις δύο εταιρίες επιθυμούν να προσληφθούν.

$$\beta). P(A \cup B) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{N(A \cup B)}{600} = \frac{1}{2} \Rightarrow N(A \cup B) = 300, \text{ άρα}$$

300 κρίθηκαν κατάλληλοι να προσληφθούν από τις εταιρίες Α ή Β.

$$\Delta 3). P(A \cup B) = \frac{1}{2} \Rightarrow P((A \cup B)') = \frac{1}{2} \Rightarrow N((A \cup B)') = 300, \text{ άρα 300 απόφοιτοι κρίθηκαν}$$

ακατάλληλοι από τις εταιρίες Α και Β

Γ : Ο απόφοιτος που κρίθηκε ακατάλληλος βρίσκει εργασία.

$$P(\Gamma) = 2 \cdot P(\Gamma') \Leftrightarrow P(\Gamma) = 2 \cdot [1 - P(\Gamma)] \Leftrightarrow P(\Gamma) = 2 - 2 \cdot P(\Gamma) \Rightarrow P(\Gamma) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{N(\Gamma)}{N(A \cup B)'} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{N(\Gamma)}{300} = \frac{2}{3} \Rightarrow N(\Gamma) = 200, \text{ άρα 200 από αυτούς που κρίθηκαν ακατάλληλοι και από τις δύο εταιρίες θα βρούν εργασία.}$$

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2012 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1). Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι :
 $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 7
- A2). Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A . Μονάδες 4
- A3). Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X , αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$; Μονάδες 4
- A4). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α). Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων
- β). Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$.
- γ). Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε ισχύει ότι $P(A) > P(B)$
- δ). Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς.
- ε). $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

A1). Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 31.

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε

$$F(x+h) - F(x) = (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) \\ = (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)),$$

και για $h \neq 0$,
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Επομένως
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Άρα
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

A2). Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 148.

σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A

τον αριθμό :
$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

A3). Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 96

Συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας (coefficient of variation), ο οποίος ορίζεται

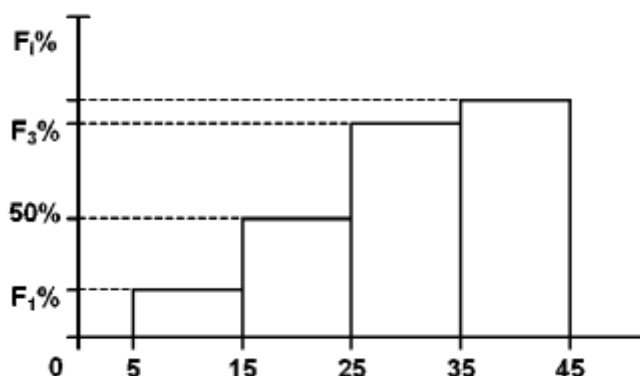
από το λόγο:
$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} \cdot 100\% = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

Αν $\bar{x} < 0$, τότε
$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|}.$$

A4). α). Λ β). Σ γ). Λ δ). Σ ε). Σ

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα $[5, 45)$ και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



B1). Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές. Μονάδες 4

B2). Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $\alpha = 8$. (μονάδες 3)

και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιο σας. (μονάδες 5)

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$F_i \%$	N_i	$F_i \%$
$[5,)$		$\alpha + 4$			
$[,)$		$3\alpha - 6$			
$[,)$		$2\alpha + 8$			
$[, 45)$		$\alpha - 2$			
Σύνολο					

B3). Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση S των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{84} = 9,17$).

Μονάδες 8

B4). Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα. Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

B1). Τρόπος α

Επειδή η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50 % των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν, προκύπτει ότι $\delta = 25$.

Τρόπος β

Αν στο διάγραμμα σχηματίσουμε την πολυγωνική γραμμή, παρατηρούμε ότι το 50 % του δείγματος προβάλλεται στον οριζόντιο άξονα στο 25, άρα $\delta = 25$.

B2). Τρόπος α

Επειδή η διάμεσος είναι $\delta = 25$, άρα οι συχνότητες των κλάσεων $[5, 15)$, $[15, 25)$ είναι το μισό μέγεθος του δείγματος, και οι κλάσεις $[35, 35)$, $[35, 45)$ το άλλο μισό του δείγματος, δηλαδή $\alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Rightarrow \alpha = 8$.

Τρόπος β

Το μέγεθος του δείγματος n ισούται με $\sum_{i=1}^4 \nu_i = 7 \cdot \alpha + 4$.

Από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % έχουμε ότι

$$F_2 = 0,5 \Leftrightarrow \frac{N_2}{n} = 0,5 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot \alpha - 2}{7 \cdot \alpha + 4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 8.$$

Ο πίνακας συχνοτήτων συμπληρώνεται με βάση το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων (F_i %) και με χρήση των τύπων :

$$f_i \% = 100 \cdot \frac{\nu_i}{n}, \text{ για } i = 1, 2, 3, 4.$$

$$N_i = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i, \text{ για } i = 1, 2, 3, 4.$$

$$F_i \% = f_1 \% + f_2 \% + \dots + f_i \%, \text{ για } i = 1, 2, 3, 4.$$

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$	$x_i \cdot \nu_i$
[5, 15)	10	12	20	12	20	120
[15, 25)	20	18	30	30	50	360
[25, 35)	30	24	40	54	90	720
[35, 45)	40	6	10	60	100	240
Σύνολα		60	100			1440

B3). Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής έχουμε :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot \nu_i = \frac{1}{60} \cdot \sum_{i=1}^4 x_i \cdot \nu_i = \frac{1}{60} \cdot 1440 = 24.$$

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης έχουμε : $S^2 =$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i - \bar{x}^2 \cdot \nu_i = \frac{1}{60} \cdot \sum_{i=1}^4 x_i - 24^2 \cdot \nu_i = 84. \text{ Άρα : } s = \sqrt{84} = 9,17.$$

B4). Τρόπος α

Εντός της κλάσης [35, 45), οι παρατηρήσεις θεωρούμε ότι κατανέμονται ομοιόμορφα.

Το πλάτος της κλάσης είναι $45 - 35 = 10$ και περιέχει 10 % των παρατηρήσεων.

Το τμήμα που μας ενδιαφέρει είναι $45 - 37 = 8$ άρα περιέχει $\frac{8}{10} \cdot 10 = 8 \%$ των παρατηρήσεων.

Τρόπος β

Έστω y το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν χρόνο στο διάστημα [37, 45).

Επειδή θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση έχουμε :

$$\frac{45 - 37}{45 - 35} = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 8.$$

Άρα, το 8% των μαθητών χρειάστηκε τουλάχιστον 37 λεπτά για να λύσει το μαθηματικό πρόβλημα.

ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν n φυσικός αριθμός με $n \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδε³ομένου ο μαθητής να μαθαίνει

$$\rightarrow \text{Γαλλικά είναι } \frac{3 \cdot n}{n^2 + 1}.$$

$$\rightarrow \text{Ισπανικά είναι } \frac{n + 2}{n^2 + 1}.$$

$$\rightarrow \text{και τις δυο παραπάνω γλώσσες είναι } \frac{n + 2}{n^2 + 1}.$$

$$\rightarrow \text{μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^2 + x}.$$

Γ1). Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δυο γλώσσες είναι βέβαιο. Μονάδες 7

Γ2). Να αποδείξετε ότι $n = 3$. Μονάδες 6

Γ3). Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δυο γλώσσες. Μονάδες 6

Γ4). Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δυο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης. Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

Έστω τα ενδεχόμενα :

$$A : \text{ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά με: } P(A) = \frac{3 \cdot n}{n^2 + 1}$$

$$B : \text{ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά με: } P(B) = \frac{n + 2}{n^2 + 1}.$$

$$\text{Δίνεται ότι: } P(A \cap B) = \frac{n + 1}{n^2 + 1}.$$

$$\begin{aligned} \Gamma 1. \text{ Είναι : } P(A \cap B) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^2 + x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 x^2 + 3 - 4}{x x + 1 \sqrt{x^2 + 3} + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 x^2 - 1}{x x + 1 \sqrt{x^2 + 3} + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 x - 1}{x x + 1 \sqrt{x^2 + 3} + 2} \cdot \frac{x + 1}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 x - 1}{x \sqrt{x^2 + 3} + 2} = \frac{2 \cdot -1 - 1}{-1 \cdot 2 + 2} = \frac{2 \cdot -1 - 1}{-1 \cdot 2 + 2} = 1. \text{ Άρα } P(A \cup B) = 1. \end{aligned}$$

και άρα το ενδεχόμενο $A \cup B$ είναι το βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ2). Σύμφωνα με τον προσθετικό νόμο είναι : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3 \cdot n}{n^2 + 1} + \frac{n + 2}{n^2 + 1} - \frac{n + 1}{n^2 + 1} = 1 \Rightarrow \frac{3n + n + 2 - n - 1}{n^2 + 1} = 1 \Rightarrow \frac{3n + 1}{n^2 + 1} = 1 \Rightarrow n^2 + 1 = 3 \cdot n + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - 3 \cdot n = 0 \Rightarrow n \cdot (n - 3) = 0 \Rightarrow n = 3.$$

$$\Gamma 3). \text{ Για } v = 3, \text{ έχουμε : } P(A) = \frac{9}{10}, P(B) = \frac{5}{10}, P(A \cap B) = \frac{4}{10},$$

$$\text{Ισχύει : } P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

(Τα ενδεχόμενα $A - B$, $B - A$ είναι ασυμβίβαστα)

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - 2P(A \cap B)$$

$$\text{Και τελικά: } P((A - B) \cup (B - A)) = \frac{9}{10} + \frac{5}{10} - 2 \cdot \frac{4}{10} = \frac{6}{10}.$$

$$\Gamma 4). \text{ Είναι: } P(A \cap B) = \frac{4}{10}.$$

$$\text{Επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα έχουμε ότι : } P(A \cap B) = \frac{N_{A \cap B}}{N_{\Omega}} = \frac{32}{N_{\Omega}}.$$

$$\text{και άρα : } \frac{32}{N_{\Omega}} = \frac{4}{10} \Rightarrow 4 \cdot N(\Omega) = 320 \Rightarrow N(\Omega) = 80.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x}$, $x > 0$.

Δ1). Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

Δ2). Έστω $M(x, f(x))$, $x > 0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f . Η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $K(x, 0)$ και η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0, f(x))$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου $OKML$ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Μονάδες 7

Δ3). Έστω η ευθεία $(\varepsilon) : y = \lambda \cdot x + \beta$, $\beta \neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$.

Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 10$ της ευθείας ε , τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 10$ και τυπική απόκλιση $S_x = 2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες

8

Δ4). Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε και $A \cap B \neq \emptyset$ τότε να αποδείξετε ότι : $f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2 \cdot f(P(A \cup B))$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

Δ1). Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγισίμων με : $f'(x) = \frac{2 \ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2}$, για $x > 0$.

$$f'(x) = -\frac{\ln x - 1}{x^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ και } x \neq e, f'(1) = -1.$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ2). Για το εμβαδό του ορθογωνίου έχουμε : $E(x) = x \cdot f(x)$, με $x > 0$ και $f(x) > 0$.

$$E(x) = 1 + \ln^2 x, E'(x) = \frac{2 \cdot \ln x}{x}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Λύνουμε την εξίσωση : $E'(x) = 0$, με $x > 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$.

Επίσης : $E'(x) > 0 \Rightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Επομένως, κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας :

$E'(x)$		0	1	$+\infty$
$E(x)$			-	+
				

Ελάχιστο

Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστο όταν $x = 1$ οπότε το ορθογώνιο ΟΛΜΛ με κορυφές $O(0, 0)$, $K(1, 0)$, $M(1, 1)$, $\Lambda(0, 1)$ είναι τετράγωνο.

Δ3). Η εφαπτομένη (η) της C_f στο σημείο της $\Sigma(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία

$(\varepsilon) : y = \lambda \cdot x + \beta$, με $\beta \neq 10$, άρα : $\lambda_\eta = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(1) = \lambda \Leftrightarrow \lambda = -1$.

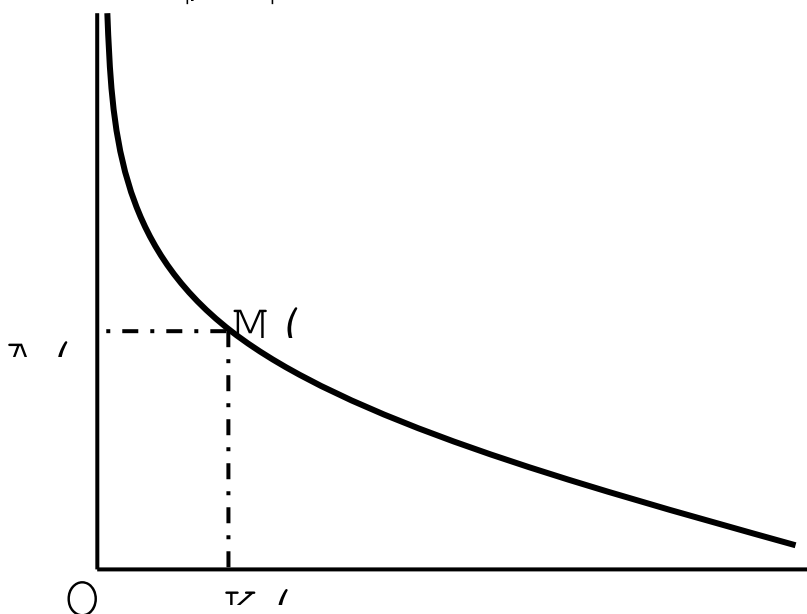
Εφόσον $(\varepsilon) : y = -x + \beta$, οι παρατηρήσεις έχουν τη μορφή : $y_i = -x_i + \beta$, για $i = 1, 2, \dots, 10$.

Οπότε με βάση την εφαρμογή 3 (σελ 99) του σχολικού βιβλίου προκύπτει : $\bar{y} = -\bar{x} + \beta = -10 + \beta$

Και $S_y = |-1| \cdot S_x = S_x = 2$.

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές θα πρέπει : $CV_y < 10 \%$.

$$CV_y \leq \frac{10}{100} \Rightarrow \frac{2}{|\beta - 10|} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow |\beta - 10| \geq 20 \Rightarrow \beta \leq -10 \text{ ή } \beta \geq 30.$$



Δ4). Επειδή $A \subseteq A \cup B$ είναι : $P(A) \leq P(A \cup B)$ με $P(A), P(A \cup B) \in (0, 1] \subseteq (0, +\infty)$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα θα ισχύει : $f(P(A)) \geq f(P(A \cup B))$ (1)

Ομοίως, επειδή :

$A \cap B \subseteq (A \cup B)$ είναι : $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$, με $P(A \cap B), P(A \cup B) \in (0, 1] \subseteq (0, +\infty)$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα θα ισχύει : $f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B))$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) παίρνουμε : $f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2 \cdot f(P(A \cup B))$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1). Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει : $P(A') = 1 - P(A)$.

Μονάδες 7

A2). Να ορίσετε το μέτρο διασποράς εύρος ή κύμανση.

Μονάδες 4

A3). Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A4). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα

που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α). $\lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x) = \sin x_0$.

β). $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.

γ). Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων.

δ). Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής X χαρακτηρίζεται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10 %.

ε). Δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B \neq \emptyset$

$\emptyset$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

A1). Σχολικό βιβλίο Σελ.151.

A2). Σχολικό βιβλίο Σελ. 92.

A3). Σχολικό βιβλίο Σελ.22.

A3). [α]. Σ [β] Σ [γ]. Σ (η μεταβλητή είναι ποσοτική διακριτή) [δ]. Λ [ε]. Λ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot e^x \cdot (2 \cdot x - 3)$, $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης δύο ενδεχόμενα A και B ενός

δειγματικού χώρου Ω με $f(x_1) P(A) = x_1$ και $P(B) = -\frac{f(x_1)}{6 \cdot \sqrt{e}}$, όπου η f παρουσιάζει ελάχιστο στο

x_1 .

B1). Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B2). Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{2}{3}$.

Μονάδες 6

B3). Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 5

Και

B4). Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \leq \frac{2}{3}$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

B1). Έχουμε $f'(x) = 2 \cdot e^x \cdot (2 \cdot x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Ισχύει $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Άρα

X	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\nearrow$
		T.E.	

Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στην θέση $x_1 = \frac{1}{2}$, με ελάχιστη τιμή

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{e}.$$

$$B2). \text{ Ισχύει } P(A) = x_1 = \frac{1}{2}, \quad P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}} = \frac{-4\sqrt{e}}{6\sqrt{e}} = \frac{2}{3}.$$

B3). Υποθέτουμε ότι A, B είναι ασυμβίβαστα. Ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος, άρα

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}, \text{ που είναι Άτοπο.}$$

Επομένως τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα.

$$B4). \text{ Ισχύει } A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A.$$

$$\text{Άρα } B - A \subseteq B \Rightarrow P(B - A) \leq P(B) \Rightarrow P(A' - B') \leq \frac{2}{3}.$$

$$\text{Θέλουμε να δείξουμε ότι } \frac{1}{6} \leq P(A' - B') \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq P(B - A) \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{2}{3} -$$

$$P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}. \text{ Ισχύει αφού } A \cap B \subseteq A \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq P(A) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Επομένως ισχύει } \frac{1}{6} \leq P(A' - B') \leq \frac{2}{3}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n ως προς μία ποσοτική μεταβλητή X και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c , όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

Κεντρικές Κλάσεις	Τιμές x_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
$[a, -)$				λ
$[-, -)$				$3 \cdot \lambda + 10$
$[-, -)$				
$[-, -)$				$\kappa \cdot \lambda^2 - 2 \cdot \lambda + 10$
$[-, -)$				$\kappa \cdot \lambda^2 - 3 \cdot \lambda + 30$
Σύνολα				

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_3 και F_5 είναι οι ρίζες της εξίσωσης :

$$5 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 3 \cdot \kappa = 0, \text{ όπου } x \in \mathbb{R} \text{ και } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Γ1). Να αποδείξετε ότι $\kappa = 1$ και $\lambda = 10$.

Μονάδες 8

Γ2). Να αποδείξετε ότι $f_1\% = 10$, $f_2\% = 30$, $f_3\% = 20$, $f_4\% = 30$ και $f_5\% = 10$.

Μονάδες 5

Γ3). Αν το 25 % των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25 % των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε ότι $a = 10$ και $c = 4$.

Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα

Συμπληρωμένο,

μονάδες 8

Γ4). Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 4

ΛΥΣΗ

Γ1). Ισχύει ότι $F_5 = 1$, άρα από τους τύπους του Vieta, έχουμε :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_3 + F_5 = \frac{8}{5} \\ F_3 \cdot F_5 = \frac{3 \cdot \kappa}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_3 + 1 = \frac{8}{5} \\ F_3 = \frac{3 \cdot \kappa}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_3 = \frac{3}{5} \\ F_3 = \frac{3 \cdot \kappa}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_3 = \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot \kappa}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_3 = \frac{3}{5} \\ 1 = \kappa \end{array} \right\}.$$

Ισχύει $F_5 \% = 100 \Rightarrow \kappa \cdot \lambda^2 - 3 \cdot \lambda + 30 = 100 \Rightarrow \lambda^2 - 3 \cdot \lambda - 70 = 0$.

Λύνουμε την εξίσωση, έχουμε $\Delta = 289 > 0$, δύο λύσεις $\lambda = 10$ και $\lambda = -7$, η οποία απορρίπτεται αφού το $\lambda = F_1 \% \geq 0$, άρα έχουμε $\lambda = 10$.

Γ2). $f_1 \% = F_1 \% = \lambda = 10$.

$$F_2 \% = 3 \cdot \lambda + 10 = 40.$$

$$f_2 \% = F_2 \% - F_1 \% = 40 - 10 = 30.$$

$$F_3 \% = 100 \cdot F_3 = 60.$$

$$f_3 \% = F_3 \% - F_2 \% = 60 - 40 = 20.$$

$$F_4 \% = \kappa \cdot \lambda^2 - 2 \cdot \lambda + 10 = 90.$$

$$f_4 \% = F_4 \% - F_3 \% = 90 - 60 = 30.$$

$$f_5 \% = F_5 \% - F_4 \% = 100 - 90 = 10.$$

Γ3). Έχουμε $25 \% = f_1 \% + \frac{1}{2} \cdot f_2 \% \Rightarrow x_2 = 16$

$$\text{Επίσης } 25 \% = \frac{1}{2} \cdot f_4 \% + f_5 \% \Rightarrow x_4 = 24.$$

$$\text{Άρα } x_4 - x_2 = 2 \cdot c \Rightarrow 2 \cdot c = 8 \Rightarrow c = 4.$$

Επομένως οι κλάσεις είναι $[a, a+4)$ και $[a+4, a+8)$.

$$\text{Άρα } x_2 = \frac{a+4+a+8}{2} \Rightarrow 16 = \frac{2a+12}{2} \Rightarrow 2 \cdot a + 12 = 32 \Rightarrow 2 \cdot a = 20 \Rightarrow a = 10.$$

Άρα

Κλάσεις [... , ...)	Κεντρικές τιμές x_i	Σχετ.Συχν. Ποσοστό f_i %	Αθ.Σχετ.Συχν F_i	Αθ.Σχετ.Συχν Ποσοστό F_i %
[10, 14)	12	10	0,1	10
[14, 18)	16	30	0,4	40
[18, 22)	20	20	0,6	60
[22, 26)	24	30	0,9	90
[26, 30)	28	10	1	100
Σύνολα		100		

Γ4). Μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι $f_4 \% + f_5 \% = 40 \%$ των παρατηρήσεων.

Στο 40 % των παρατηρήσεων αντιστοιχούν 800 παρατηρήσεις. Άρα $40 \cdot v = 800 \cdot 100 \Rightarrow v = 2000$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, όπου

$\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 0$ και $-1 < \omega_3 < \omega_4$. Δίνονται, επίσης, οι πιθανότητες $P(\omega_i) = f(\omega_i) - \frac{1}{3}$, όπου $i = 1, 2$

και $P(\omega_3) = -\frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$.

Δ1). Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B και Γ του δειγματικού χώρου Ω με $A = \{\omega \in \Omega / f'(\omega) \leq 0\}$,

$B = \{\omega \in \Omega / f(\omega) > 1\}$ και $\Gamma = \{\omega \in \Omega / x^2 + \omega \cdot x \geq -\frac{1}{4}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\}$.

α). Να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$, $P(\omega_3)$ και $P(\omega_4)$.

β). Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$ και $P(A - B)$.

Μονάδες 16

Δ2). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f, η οποία σχηματίζει

με τον άξονα x'x γωνία 45°.

Μονάδες 4

Δ3). Αν $M_k(\omega_k, y_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε): $y = x + 1$, με $2 \cdot \delta_\omega = \delta_{y_k}$ και $R_{y_k} = 5$

τότε να υπολογίσετε τα ω_3 και ω_4 του δειγματικού χώρου Ω , όπου

δ_ω : η διάμεσος των τετμημένων των σημείων M_k ,

δ_y : η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων M_k και

R_y : το εύρος των τεταγμένων των σημείων M_k .

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

Δ1). α). έχουμε :

$$\rightarrow P(\omega_1) = P(-1) = f(-1) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$\rightarrow P(\omega_2) = P(0) = f(0) - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\rightarrow \text{έχουμε } f'(x) = \frac{-x-1}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+1}, \text{ άρα } \frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+1}{x^2+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Επομένως } P(\omega_3) = \frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}.$$

$$\rightarrow P(\omega_4) = 1 - P(\omega_1) - P(\omega_2) - P(\omega_3) = \frac{1}{12}.$$

$$\Delta 1), \beta). \text{ ισχύει } f'(\omega) \leq 0 \Rightarrow \frac{1-\omega}{\omega^2+1} \leq 0 \Rightarrow 1-\omega \leq 0 \Rightarrow \{\omega \leq -1 \text{ ή } \omega \geq 1\}. \text{ Άρα } A = \{-1, \omega_3, \omega_4\}.$$

$\omega_4\}$.

$$\text{Και } P(A) = P(-1) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

$$\rightarrow \text{ισχύει } f(\omega) > 1 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega^2+1} + 1 > 1 \Rightarrow \omega > 0, \text{ άρα } B = \{\omega_3, \omega_4\}.$$

$$\text{Και } P(B) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

$$\rightarrow \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } x^2 + \omega \cdot x \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + \omega \cdot x + \frac{1}{4} \geq 0.$$

$$\text{Πρέπει } \Delta \leq 0 \Rightarrow \omega^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow \omega \in [-1, 1]. \text{ Άρα } \Gamma = \{-1, 0\}.$$

$$\text{Και } P(\Gamma) = P(-1) + P(0) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

$$\rightarrow \text{ισχύει } A - B = \{-1\} \text{ και } P(A - B) = P(-1) = \frac{1}{6}.$$

$$\Delta 2). \text{ Έστω } M(x_0, f(x_0)) \text{ το σημείο επαφής ισχύει } f'(x_0) = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow \frac{1-x_0^2}{x_0^2+1} = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_0 =$$

0.

Άρα, έχουμε $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ και η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο M είναι :

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 1 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x + 1.$$

$\Delta 3).$ Έχουμε $\omega_1 = -1, 0, \omega_3, \omega_4$. Άρα

$$\rightarrow M_1 \in (\varepsilon) \Rightarrow y_1 = \omega_1 + 1 = -1 + 1 = 0.$$

$$\rightarrow M_2 \in (\varepsilon) \Rightarrow y_2 = \omega_2 + 1 = 0 + 1 = 1.$$

$$\rightarrow M_3 \in (\varepsilon) \Rightarrow y_3 = \omega_3 + 1.$$

$$\rightarrow M_4 \in (\varepsilon) \Rightarrow y_4 = \omega_4 + 1.$$

Ισχύει $1 < \omega_3 < \omega_4$, άρα $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$.

$$\text{Επομένως το εύρος } R_y = y_4 - y_1 \Rightarrow 5 = (\omega_4 + 1) - 0 \Rightarrow 5 = \omega_4 + 1 \Rightarrow \omega_4 = 4.$$

$$\rightarrow \delta_{\omega\kappa} = \frac{0 + \omega_3}{2} = \frac{\omega_3}{2}$$

$$\rightarrow \delta_{y\kappa} = \frac{0 + \omega_3 + 1}{2} = \frac{2 + \omega_3}{2},$$

$$\text{Ισχύει } 2 \cdot \delta_{\omega\kappa} = \delta_{y\kappa} \Rightarrow 2 \cdot \frac{\omega_3}{2} = \frac{2 + \omega_3}{2} \Rightarrow \dots \Rightarrow \omega = 2.$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ – Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1). Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 7
- A2). Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$; Μονάδες 4
- A3). Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων. Μονάδες 4
- A4). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α). Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ ισχύει ότι $f'(x) = \frac{1}{x^2}$.
- β). Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι $(f(x)g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- γ). Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.
- δ). Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.
- ε). Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, ισχύει ότι $P(A) > P(B)$ Μονάδες 10

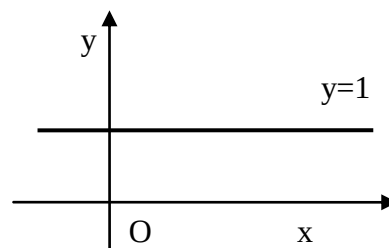
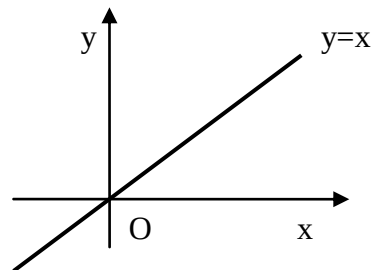
ΛΥΣΗ

A1). Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$, και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

$$\text{Επομένως } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1,$$

$$\text{Άρα } f'(x) = 1.$$



A2). Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$, Όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .

A3). Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσaiών παρατηρήσεων όταν n είναι άρτιος αριθμός.

A5). (α). Λ (β). Σ (γ). Λ (δ). Λ (ε). Λ.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_4\}$ και $B = \{\omega_1, \omega_3\}$. Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι :

$$\rightarrow \text{Η } P(\omega_1) = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x^3 + x^2},$$

$\rightarrow$ Η $P(\omega_3)$ είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x , όταν $x = 1$,

$$\text{όπου } f(x) = \frac{x}{3} \cdot \ln x, \quad x > 0$$

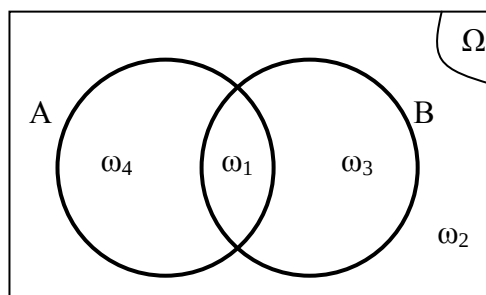
B1). Να αποδείξετε ότι $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$ και $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$. Μονάδες 10

B2). Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$, όπου A' το συμπληρωματικό του A . Μονάδες 7

B3). Αν $P(A') = \frac{3}{4}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$, $P[(A - B) \cup (B - A)]$ και

$P(A' - B')$, όπου B' το συμπληρωματικό του B . Μονάδες 8

ΛΥΣΗ



$$\begin{aligned} \text{B1). } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x^3 + x^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x^2 \cdot x + 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}^2 - 1^2}{x^2 \cdot x + 1 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x^2 \cdot x + 1 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \cdot x + 1}{x^2 \cdot x + 1 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} + 1} = \frac{1}{-1 \cdot \sqrt{-1^2 + -1 + 1} + 1} = \frac{1}{-1 \cdot \sqrt{1 - 1 + 1} + 1} = \\ &= \frac{1}{-1 \cdot 1 + 1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$0 \leq P(\omega) \leq 1$$

$$\bullet \quad P(\omega_1) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

$\bullet$ Ρυθμός μεταβολής της $f(x) = \frac{x}{3} \cdot \ln x$, $x > 0$ ως προς το x είναι

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3} \cdot \ln x\right)' = \left(\frac{x}{3}\right)' \cdot \ln x + \frac{x}{3} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{3} \cdot \ln x + \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \cdot \ln x + \frac{1}{3}, \quad x > 0$$

$$f'(1) = \frac{1}{3} \cdot \ln 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Άρα } P(\omega_3) = \frac{1}{3}.$$

$$B2). P(A') = 1 - P(A)$$

$$A' = \{\omega_2, \omega_3\}. \quad P(A') = P(\omega_2) + P(\omega_3) \Rightarrow P(A') = P(\omega_2) + \frac{1}{3} \quad 0 \leq P(\omega_2) < 1$$

$$\text{Άρα } \rightarrow P(A') \geq \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \text{Έστω } P(A') \leq \frac{3}{4} \text{ δηλαδή}$$

$$1 - P(A) \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{3}{4} \leq P(A) \Rightarrow \frac{4-3}{4} \leq P(A) \Rightarrow \frac{1}{4} \leq P(A)$$

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4) \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4} + P(\omega_4) \quad 0 \leq P(\omega_4) < 1$$

$$\text{άρα } \frac{1}{4} \leq P(A).$$

$$B3). \bullet P(A') = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12}.$$

$$\bullet P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = P(\Omega) \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} + P(\omega_4) = 1$$

$$\frac{3+5+4}{12} + P(\omega_4) = 1 \Rightarrow \frac{12}{12} + P(\omega_4) = 1, \text{ Άρα } P(\omega_4) = 0.$$

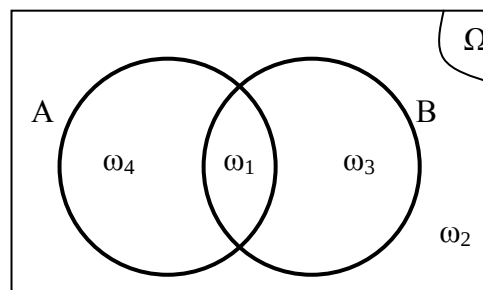
$$\bullet (A - B) \cup (B - A) = \emptyset.$$

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) = P(\omega_4) + P(\omega_3) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\bullet A' = \{\omega_2, \omega_3\}, \quad B' = \{\omega_2, \omega_4\}, \quad A' - B' = \{\omega_3\}, \quad P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}.$$

2^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} P(A' - B') &= P(A' \cap (B')') = P(A' \cap B) = \\ &= P(B - A) = P(\omega_3) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα n παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλατείς κλάσεις. Δίνεται ότι :

→ η μικρότερη παρατήρηση είναι 50.

→ η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4 = 85$.

→ η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης.

→ η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\delta = 75$ και

→ η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 74$.

Γ1). Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι $c = 10$

Μονάδες 4

Γ2). Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
$[-, -)$		
$[-, -)$		
$[-, -)$		
$[-, -)$		
Σύνολο		

Γ3). Δίνεται ότι $f_1 = 0,1$, $f_2 = 0,3$, $f_3 = 0,2$ και $f_4 = 0,4$.

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\frac{200}{3}$.

Μονάδες 7

Γ4). Επιλέγουμε k παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με $k < n$, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με

→ το 2,5 % των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74.

→ το 16 % των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68.

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

Γ1). Έχουμε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων :

Κλάσεις $[a, \beta)$	κεντρικές τιμές x_i	Σχετικές συχνότητες f_i
$[50, 50 + c)$	x_1	f_1
$[50 + x, 50 + 2 \cdot c)$	x_2	f_2
$[50 + 2 \cdot c, 50 + 3 \cdot c)$	x_3	f_3
$[50 + 3 \cdot c, 50 + 4 \cdot c)$	$x_4 = 85$	$f_4 = 2 \cdot f_3$
		1

$$\text{Ισχύει : } x_4 = \frac{50 + 3c + 50 + 4c}{2} \Rightarrow 85 = \frac{100 + 7 \cdot c}{2} \Rightarrow 170 = 100 + c \Rightarrow 7 \cdot c = 70 \Rightarrow c = 10.$$

Γ2). Εφόσον η διάμεσος των παρατηρήσεων είναι : $\delta = 75$ ισχύει :

$$f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = \frac{f_3}{2} + f_4 \Rightarrow f_1 + f_2 = f_4 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης : } f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Rightarrow f_4 + f_3 + f_4 = 1 \Rightarrow f_3 + 2 \cdot f_4 = 1 \Rightarrow 5 \cdot f_3 = 1, \text{ αφού } f_3 = 0,2,$$

$$\text{Επομένως : } f_4 = 0,4 \text{ και από την (1) παίρνουμε } f_1 + f_2 = 0,4 \quad (3)$$

Με τα δεδομένα αυτά ο πίνακας γίνεται :

Κλάσεις [α, β)	κεντρικές τιμές x_i	σχετικές συχνότητες f_i	$x_i \cdot f_i$
[50, 60)	55	$f_1 = 0,1$	$55 \cdot f_1$
[60, 70)	65	$f_2 = 0,3$	$65 \cdot f_2$
[70, 80)	75	0,2	15
[80, 90)	85	0,4	34
		1	

Οπότε για τη μέση τιμή έχουμε : $\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot f_i \Rightarrow 74 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 15 + 34 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 55 \cdot f_1 + 65 \cdot (0,4 - f_1) = 25 \Rightarrow 55 \cdot f_1 - 65 \cdot f_1 + 26 = 25 \Rightarrow -10 \cdot f_1 = -1 \Rightarrow f_1 = 0,1.$$

$$\text{Τελικά : } f_2 = 0,4 - f_1 \Rightarrow f_2 = 0,3.$$

Γ3). Για τη μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 έχουμε :

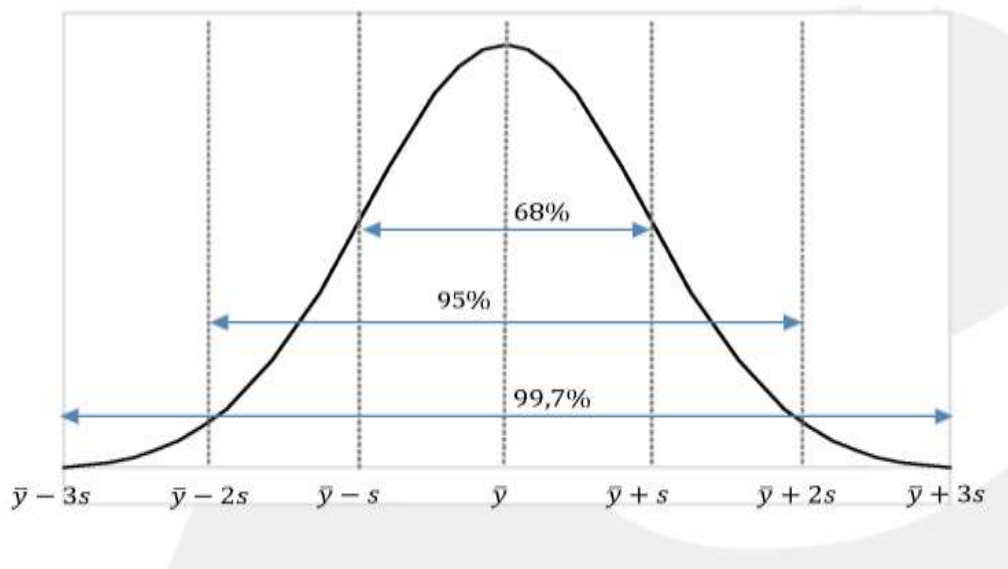
x_i	f_i	v_i
55	0,1	$0,1 \cdot v$
65	0,2	$0,3 \cdot v$
75	0,3	$0,2 \cdot v$
85	0,4	$0,4 \cdot v$

Επειδή οι σχετικές συχνότητες τροποποιούνται στο νέο δείγμα έχουμε τον νέο πίνακα :

x_i	v_i
55	$0,1 \cdot v$
65	$0,3 \cdot v$
75	$0,2 \cdot v$
85	$0,4 \cdot v$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{0,6 \cdot v} \cdot \sum_{i=1}^3 x_i \cdot v_i = \frac{1}{0,6 \cdot v} (0,1 \cdot v \cdot 55 + 0,3 \cdot v \cdot 65 + 0,2 \cdot v \cdot 75) = \frac{1}{0,6 \cdot v} (55 + 195 + 150) = \\ &= \frac{400}{0,6} = \frac{200}{0,3} = \frac{2000}{3}. \end{aligned}$$

Γ4). Για την κανονική κατανομή έχουμε :



Ισχύουν : $\bar{y} + 2 \cdot S = 75$ και $\bar{y} - S = 68$.

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $S = 2$ και $\bar{y} = 70$.

Συνεπώς : $CV = \frac{S}{\bar{y}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < \frac{1}{10}$ και το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x + \kappa$, $x > 0$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$ και την εφαπτομένη (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$, η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού E , με $E < 2$.

Δ1). Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

Μονάδες 5

Δ2). Έστω $x_1, x_2, \dots, x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της (ϵ) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y} = 31$.

α). Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 30$.

β). Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :

Κάθε μία από τις τετμημένες $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$.

Να βρείτε το λ , ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31.

Μονάδες 6

Δ3). Αν $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$ με $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών

$$f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(e), f'\left(\frac{1}{e}\right), \text{ όπου } f(x) = x \cdot \ln x + 2.$$

Μονάδες 7

Δ4). Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο

$$\Omega = \{t_n, n = 1, 2, 3, \dots, 30 : 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} < \dots < t_{30} = 1\}.$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

$A = \{t \in \Omega : \text{η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της } f \text{ στο σημείο } (t, f(t)), \text{ να σχηματίζει με τον άξονα } x'x \text{ οξεία γωνία}\},$

$B = \{t \in \Omega : f(t) > f'(t) + 1\}, \text{ όπου } f(t) = t \cdot \ln t + 2.$

Να βρεθούν οι πιθανότητες :

α). να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A .

β). να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα A και B .

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

$$\Delta 1). f(x) = x \cdot \ln x + \kappa, x > 0, \kappa > 1.$$

$$(\epsilon) : y = \alpha \cdot x + \beta, \text{ όπου } \alpha = f'(x_0)$$

$$A(1, f(1)) \quad f(1) = 1 \cdot \ln 1 + \kappa$$

$$A(1, \kappa) \quad f(1) = \kappa.$$

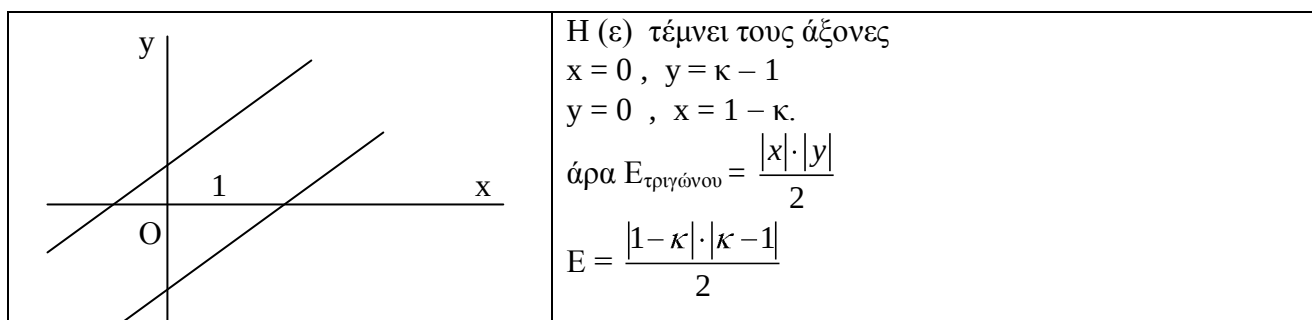
$$f'(x) = (x \cdot \ln x + \kappa)' \Rightarrow f'(x) = (x \cdot \ln x)' + (\kappa)' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \Rightarrow f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \ln x + 1 \Rightarrow f'(1) = \ln 1 + 1 \Rightarrow f'(1) = 1.$$

$$(\epsilon) : y = 1 \cdot x + \beta \Rightarrow \kappa = 1 + \beta \Rightarrow \beta = \kappa - 1$$

$$(\epsilon) : y = x + \kappa - 1$$

$$\text{ή } (\epsilon) : y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - \kappa = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = x - 1 + \kappa.$$



$$E < 2, E = \frac{\kappa - 1^2}{2} < 2.$$

$$(\kappa - 1)^2 < 4$$

$$|\kappa - 1| < 2$$

$$-2 < \kappa - 1 < 2$$

$$-1 < \kappa < 3 \quad \text{άρα } \kappa = 2.$$

$$\kappa - \text{ακέραιος}$$

$$\kappa > 1$$

$$\Delta 2). \alpha). \bar{y} = 31 \quad \text{για } \kappa = 2 \quad (\epsilon) : y = x + 1.$$

1^{ος} Τρόπος

$$\text{Σύμφωνα με την εφαρμογή του βιβλίου 3 σελίδα 99 : } \bar{y} = \bar{x} + 1 \Rightarrow 31 = \bar{x} + 1 \Rightarrow \bar{x} = 30.$$

2^{ος} Τρόπος

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{50}}{50} \Rightarrow 31 = \frac{x_1 + 1 + x_2 + 1 + \dots + x_{50} + 1}{50} \Rightarrow 31 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{50} + 50}{50} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 31 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{50}}{50} + \frac{50}{50} \Rightarrow 31 = \bar{x} + 1 \Rightarrow \bar{x} = 30. \end{aligned}$$

$$\beta). \bar{x} = \frac{\Sigma_{50}}{50} \Rightarrow \bar{x} = \frac{550}{50} \Rightarrow \Sigma_{50} = 1500$$

$$\bar{x}_N = \frac{x_1 + 3 + x_2 + 3 + \dots + x_{20} + 3 + x_{21} + x_{22} + \dots + x_{35} + x_{36} - \lambda + x_{37} - \lambda + \dots + x_{50} - \lambda}{50}$$

$$\bar{x}_N = \frac{\Sigma_{50} + 3 \cdot 20 - 15 \cdot \lambda}{50} \Rightarrow 31 \cdot 50 = 1560 - 15 \cdot \lambda \Rightarrow 1550 = 1560 - 15 \cdot \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 \cdot \lambda = 1560 - 1550 \Rightarrow 15 \cdot \lambda = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{10}{15} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}.$$

$$\Delta 3). f(x) = x \cdot \ln x + 2, x > 0$$

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f'(x) \geq 0$$

$$\ln x + 1 \geq 0 \Rightarrow \ln x \geq -1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{e}.$$

x	1/e	e
f'(x)	+	
f(x)		

Η f γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{1}{e}, e\right)$

$$\text{Άρα } f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1 = \ln 1 - \ln e + 1 = 0 - 1 + 1 = 0.$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 2 = \frac{1}{e} \cdot -1 + 2 = -\frac{1}{e} + 2 > 0$$

$$f(e) = e \cdot \ln e + 2 = e \cdot 1 + 2 = e + 2.$$

$$\text{Άρα } R = f(e) - f\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$R = e + 2 - 0 = e + 2.$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\alpha \cdot \ln \alpha + \beta \cdot \ln \beta + \gamma \cdot \ln \gamma + 8 + e}{5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{x} = \frac{\ln \alpha^\alpha + \ln \beta^\beta + \ln \gamma^\gamma + 8 + e}{5} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\ln \alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma + 8 + e}{5} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\ln e^7 + 8 + e}{5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{x} = \frac{7 \cdot \ln e + 8 + e}{5} \Rightarrow \bar{x} = \frac{7 + 8 + e}{5} \Rightarrow \bar{x} = \frac{15}{5} + \frac{e}{5} \Rightarrow \bar{x} = 3 + \frac{e}{5}. \end{aligned}$$

$\Delta 4).$ α). αφού η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $(7, f(7))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία ω $\epsilon\phi\omega = f'(t) > 0$, άρα $\ln 7 + 1 > 0$,

$$\ln 7 > -1 \Rightarrow \ln 7 > \ln \frac{1}{e} \quad (\text{η } \ln \text{ είναι φν. αύξουσα}) \quad 7 > \frac{1}{e}$$

$$\text{Άρα } A = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{30}\}, P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega}, P(A) = \frac{20}{30} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}.$$

$$\beta). f(t) > f'(t) + 1$$

$$t \cdot \ln t + 2 > \ln t + 2$$

$$t \cdot \ln t - \ln t > 0$$

$$(t - 1) \cdot \ln t > 0$$

t	0	1	$+\infty$
t - 1	-		+
ln t	-		+
(t - 1) · ln t	+		+

$$0 < t < 1$$

$$B = \{t_1, t_2, \dots, t_{29}\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{19}{30}.$$