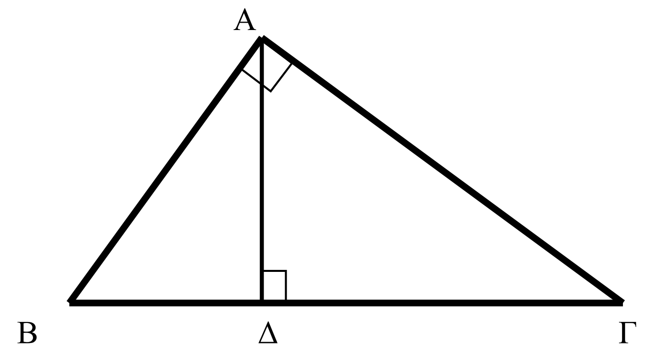
ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ



$\hat{A} = 90^o$
$A\Delta \perp B\Gamma$

Το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς είναι ίσο με την υποτείνουσα επί την προβολή της πλευράς στην υποτείνουσα. $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ ή $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ο λόγος των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους στην υποτείνουσα. $\dfrac{AB^2}{A\Gamma^2} = \dfrac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων του πλευρών. $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$ [Πυθαγόρειο θεώρημα]

Σε κάποιο τρίγωνο αν το τετράγωνο μιας πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών , τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$
[Αντίστροφο πυθαγόρειου]

Το τετράγωνο του ύψους είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των δύο καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα. $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το γινόμενο των καθέτων πλευρών είναι ίσο με το γινόμενο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα επί την υποτείνουσα. $AB \cdot A\Gamma = B\Gamma \cdot A\Delta$.

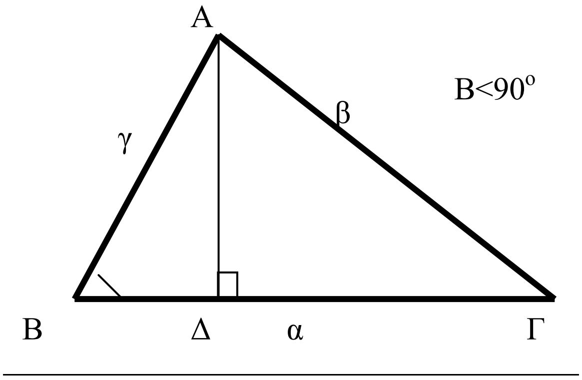
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και ύψος $A\Delta = \upsilon_\alpha$. ισχύει $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} = \dfrac{1}{\upsilon_\alpha^2}$.

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΤΥΧΑΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Θεώρημα αμβλείας γωνίας

Σε τρίγωνο ΑΒΓ το τετράγωνο πλευράς απέναντι από οξεία γωνία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών ελαττωμένο κατά το διπλάσιο της μιας πλευράς επί την προβολή της άλλης σε αυτήν.

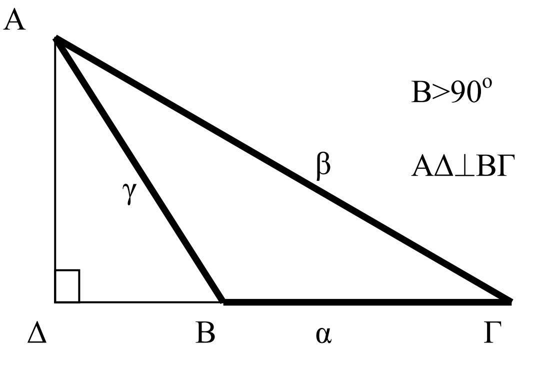
Δηλαδή: $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\cdot\alpha\cdot B\Delta$



Θεώρημα αμβλείας γωνίας

Σε τρίγωνο ΑΒΓ το τετράγωνο πλευράς απέναντι από αμβλεία γωνία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών αυξημένο κατά το διπλάσιο της μιας πλευράς επί την προβολή της άλλης σε αυτήν.

Δηλαδή: $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\cdot\alpha\cdot B\Delta$



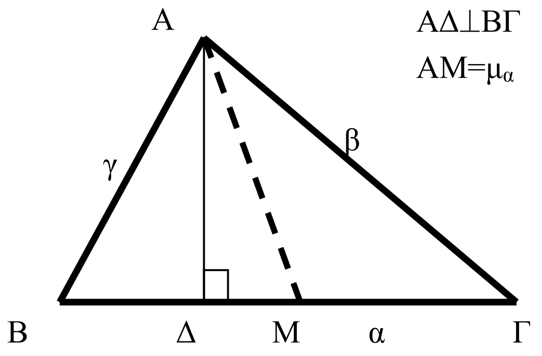
Σε κάθε τρίγωνο ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow A = 90^o$	$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow A < 90^o$	$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow A > 90^o$

Νόμος συνημιτόνων

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\cdot\beta\cdot\gamma\cdot συνA$	$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\cdot\alpha\cdot\gamma\cdot συνB$	$\gamma^2 > \beta^2 + \alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot συνΓ$

<u>Θεωρήματα διαμέσων</u>

1). Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο τετράγωνο της διαμέσου που αντιστοιχεί στην τρίτη πλευρά αυξημένο κατά το ήμισυ του τετραγώνου της πλευράς αυτής. 2). Σε κάθε τρίγωνο η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της διαμέσου που αντιστοιχεί σε αυτήν.	(1) $\beta^2 + \gamma^2 = 2\cdot\mu^2_\alpha + \dfrac{\alpha^2}{2}$  ΑΔ⊥ΒΓ ΑΜ=μ_α (2) $\beta^2 - \gamma^2 = 2\cdot\alpha\cdot M\Delta$

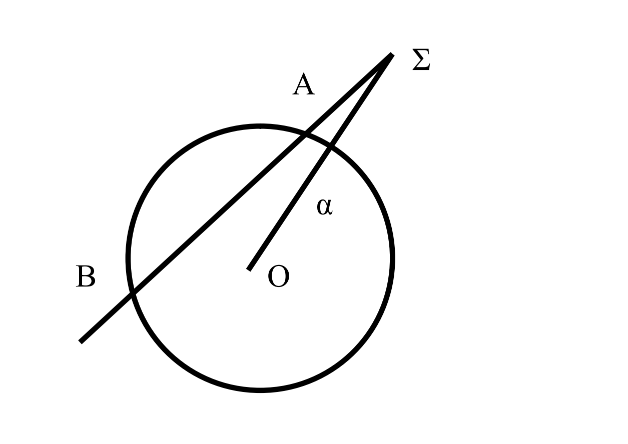
Σε κάθε τρίγωνο ισχύει

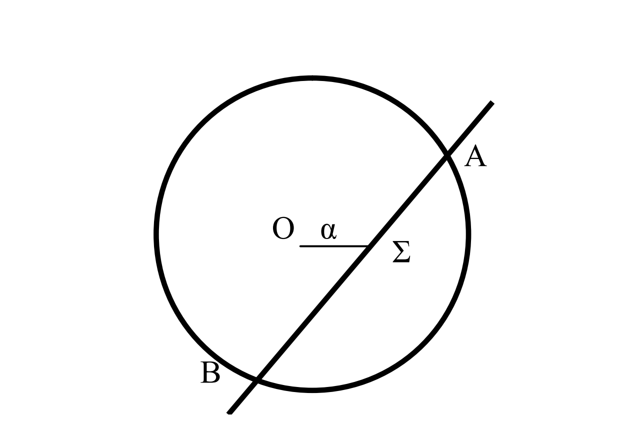
$\mu_\alpha^2 = \dfrac{2\cdot\beta^2 + 2\cdot\gamma^2 - \alpha^2}{4}$	$\mu_\beta^2 = \dfrac{2\cdot\alpha^2 + 2\cdot\gamma^2 - \beta^2}{4}$	$\mu_\gamma^2 = \dfrac{2\cdot\beta^2 + 2\cdot\alpha^2 - \gamma^2}{4}$

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

Από σημείο Σ εκτός κύκλου (Ο, ρ) με ΣΟ = α , φέρουμε τέμνουσα ΣΑΒ του κύκλου το γινόμενο ΣΑ·ΣΒ είναι σταθερό και ίσο με $α^2 – ρ^2$.

Από σημείο Σ εντός κύκλου (Ο, ρ) με ΣΟ = α , φέρουμε τέμνουσα ΣΑΒ του κύκλου το γινόμενο ΣΑ·ΣΒ είναι σταθερό και ίσο με $ρ^2 – α^2$.

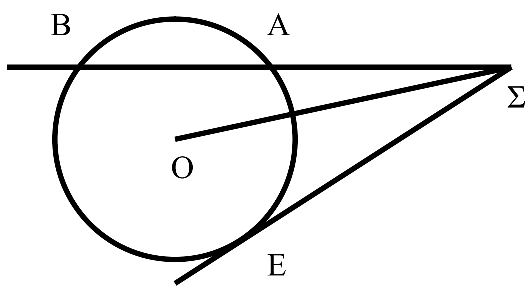




Για σημείο Σ του επιπέδου του κύκλου (Ο, ρ) το οποίο απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ΣΟ = α, ο σταθερός αριθμός $α^2 – ρ^2$ ονομάζεται δύναμη του σημείου Σ ως προς τον κύκλο (Ο, ρ).

Αν $α^2 – ρ^2 > 0$, τότε το σημείο Σ βρίσκεται εκτός του κύκλου.
Αν $α^2 – ρ^2 = 0$, τότε το σημείο Σ βρίσκεται επί του κύκλου.
Αν $α^2 – ρ^2 < 0$, τότε το σημείο Σ βρίσκεται εντός του κύκλου.

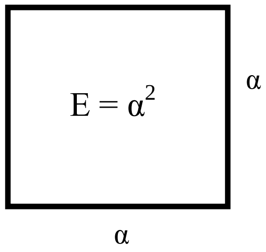
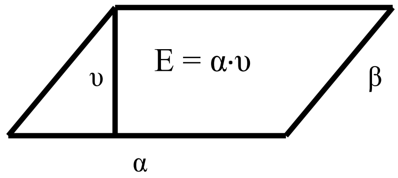
Αν Σ είναι σημείο εκτός κύκλου (Ο, ρ), τότε η δύναμη του σημείου Σ ως προς τον κύκλο (Ο, ρ) είναι ίση με $ΣΕ^2$, όπου ΣΕ το εφαπτόμενο τμήμα από το Σ στον κύκλο.

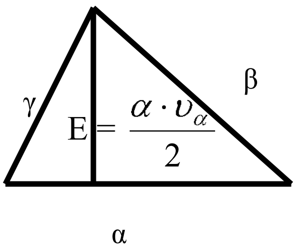
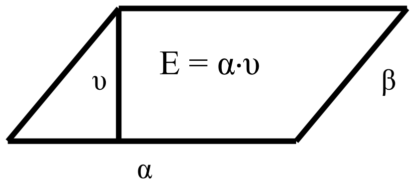


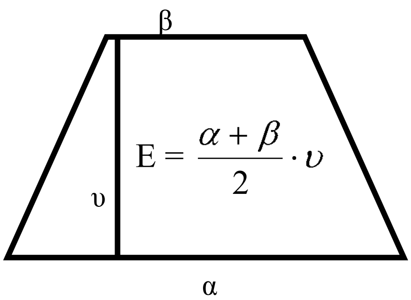
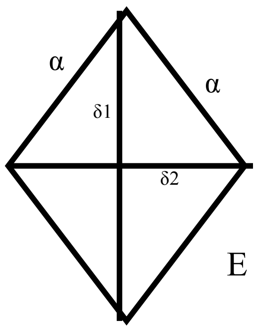
$ΣΕ^2 = α^2 – ρ^2 = ΣΑ·ΣΒ$

ΕΜΒΑΔΑ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

Εμβαδά βασικών σχημάτων

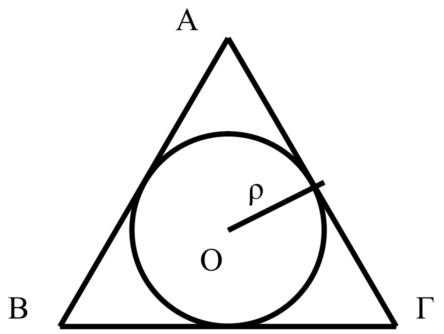
<table>
<tr>
<td>Τετράγωνο

</td>
<td>παραλληλόγραμμο


υ = ύψος</td>
</tr>
<tr>
<td>Τρίγωνο

</td>
<td>παραλληλόγραμμο


υ = ύψος</td>
</tr>
<tr>
<td>Τραπέζιο

</td>
<td>ρόμβος


$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Το εμβαδόν οποιουδήποτε τετράπλευρου με κάθετες διαγώνιες δ_1, δ_2 είναι ίσο με
$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$</td>
</tr>
</table>

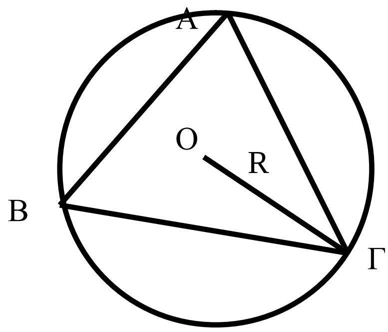
ΕΜΒΑΔΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ



(O, ρ) ο εγγεγραμμένος στο τρίγωνο κύκλος και $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου

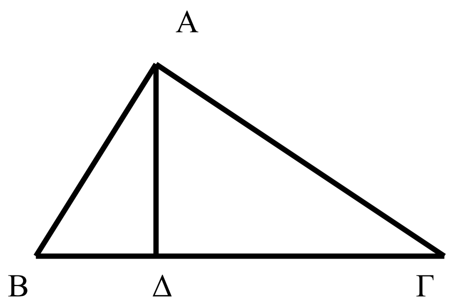
τότε το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$E = \tau \cdot \rho$$



(O, R) ο περιγγεγραμμένος στο τρίγωνο κύκλος
τότε το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4 \cdot R}$$



Το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$E = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu\Gamma = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu B$$

και ακόμα

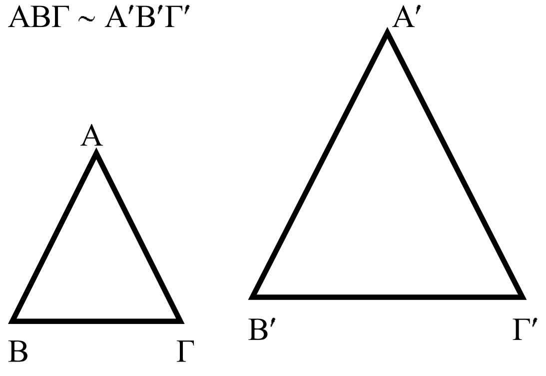
$$E = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \upsilon_\gamma$$

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ο νόμος των ημιτόνων: $\dfrac{\alpha}{\eta\mu\alpha} = \dfrac{\beta}{\eta\mu\beta} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\gamma} = 2 \cdot R$

ΕΜΒΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΟΙ

Δύο όμοια τρίγωνα με λόγο ομοιότητας λ, έχουν λόγο εμβαδών ίσο με λ^2

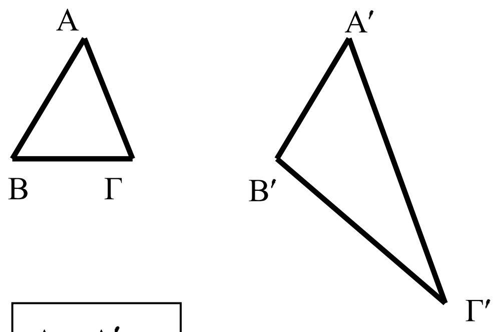
$AB\Gamma \sim A'B'\Gamma'$



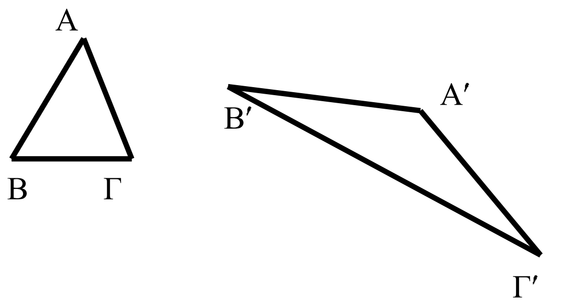
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ.

Άρα ισχύει: $\dfrac{E_{(AB\Gamma)}}{E_{(A'B'\Gamma')}} = \lambda^2$

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση ή δύο γωνίες τους είναι παραπληρωματικές τότε ισχύει ότι , ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο του γινομένου των πλευρών που περιέχουν τις ίσες ή παραπληρωματικές γωνίες τους.



$A = A'$



$A + A' = 180^o$

Ισχύει $\left\{\begin{array}{l} A = A' \\ \acute{\eta} \\ A + A' = 180^O \end{array}\right\}$ τότε $\dfrac{E_{(AB\Gamma)}}{E_{(A'B'\Gamma')}} = \dfrac{AB \cdot A\Gamma}{A'B' \cdot A'\Gamma'}$

Παρατηρήσεις

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση , τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των υψών που αντιστοιχούν στις ίσες τους πλευρές.

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο ίσα ύψή, τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των πλευρών που αντιστοιχούν στα δυο ύψη.

Η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.

Σε ένα τραπέζιο οι διαγώνιοι το χωρίζουν σε τέσσερα τρίγωνα, και ισχύει:
Τα τρίγωνα που ορίζονται από το σημείο τομής των διαγωνίων και τις βάσεις του τραπεζίου είναι όμοια.
Ενώ τα άλλα δύο τρίγωνα που ορίζονται από το σημείο τομής των διαγωνίων του και από τις μη-παράλληλες πλευρές του είναι ισεμβαδικά.

Το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α είναι $E = \dfrac{\alpha^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

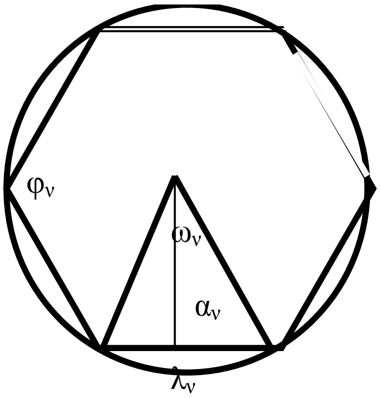
Σε κάθε τρίγωνο ισχύει : $\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \upsilon_\beta = \gamma \cdot \upsilon_\gamma = 2 \cdot E$.

Σε παραλληλόγραμμο με πλευρές α, β και αντίστοιχα ύψη υ_1 και υ_2 ισχύει ότι
$\alpha \cdot \upsilon_1 = \beta \cdot \upsilon_2 = E$

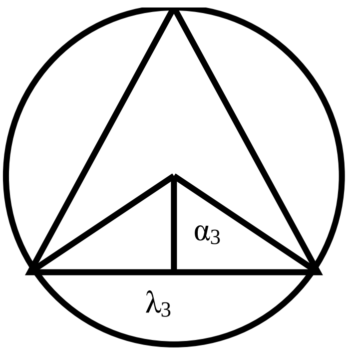
Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ, ισχύει ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

ΠΟΛΥΓΩΝΑ

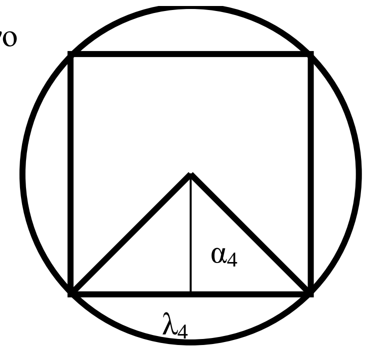
Κανονικό πολύγωνο είναι το πολύγωνο που έχει όλες του τις πλευρές και όλες του της γωνίες ίσες. Όλα τα κανονικά πολύγωνα γράφονται σε κύκλο.

ν-γωνο 	Κεντρική γωνία ν-γώνου $\omega_\nu = \frac{360^o}{\nu}$ Γωνία ν-γώνου $\varphi_\nu = 360 - \omega_\nu$ Πλευρά ν – γώνου λ_ν Απόστημα ν-γώνου α_ν Ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου R $\left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2 = R^2$ Περίμετρος ν-γώνου $P_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$ Εμβαδόν ν-γώνου $E_\nu = \frac{1}{2} \cdot P_\nu \cdot \alpha_\nu$.

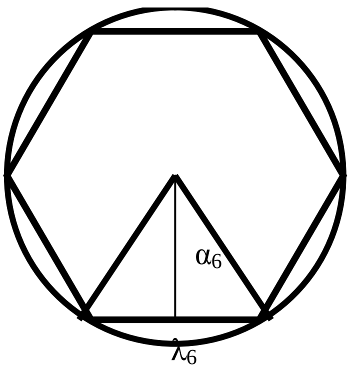
Κανονικό τρίγωνο

Τρίγωνο 	$\omega_3 = 120^o$ $\varphi_3 = 60^o$ $\lambda_3 = R \cdot \sqrt{3}$ $\alpha_3 = \frac{R}{2}$

Κανονικό τετράγωνο

Τετράγωνο 	$\omega_4 = 90^o$ $\varphi_4 = 90^o$ $\lambda_4 = R\cdot\sqrt{2}$ $\alpha_4 = \dfrac{R\cdot\sqrt{2}}{2}$

Κανονικό εξάγωνο

εξάγωνο 	$\omega_6 = 60^o$ $\varphi_6 = 1200^o$ $\lambda_6 = R$ $\alpha_\nu = \dfrac{R\cdot\sqrt{3}}{2}$

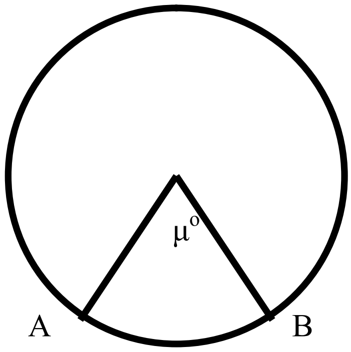
Παρατηρήσεις

- Η εξωτερική γωνία ενός πολυγώνου είναι ίση με την κεντρική του γωνία.
- Δύο κανονικά πολύγωνα με ίσο πλήθος πλευρών είναι όμοια.
- Κάθε ν-γωνο εκτός από τον περιγεγραμμένο κύκλο έχει και εγγεγραμμένο κύκλο ο οποίος εφάπτεται των πλευρών του.
- Τύπος του αρχιμήδη: $\lambda_{2\nu} = \sqrt{2\cdot R^2 - R\cdot\sqrt{4\cdot R^2 - \lambda_\nu^2}}$.
- Για εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο ν-γωνα σε κύκλο ακτίνας R ισχύει:
  $\dfrac{\lambda'_\nu}{R} = \dfrac{\lambda_\nu}{\alpha_\nu}$ $\quad E'_\nu = \dfrac{1}{2}\cdot\nu\cdot R^2\cdot\dfrac{\lambda_\nu}{\alpha_\nu}$.

ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ – ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

Κυκλικό τομέα ονομάζουμε την περιοχή του κύκλου που ορίζεται από δύο ακτίνες και το τόξο ΑΒ του κύκλου στο οποίο αντιστοιχεί η επίκεντρη γωνία μ^o την οποία ορίζουν.

Κυκλικό τμήμα είναι η περιοχή του τομέα που ορίζεται από την αντίστοιχη χορδή ΑΒ και το τόξο ΑΒ

<table>
<tr><td>Μήκος κύκλου
$L = 2\cdot\pi\cdot R$</td><td>Μήκος τόξου ΑΒ
$S = 2\cdot\pi\cdot R\cdot\frac{\mu}{360}$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Εμβαδόν κύκλου
$E = \pi\cdot R^2$</td><td>Εμβαδόν κυκλικού τομέα
$E = \pi\cdot R^2\cdot\frac{\mu}{360}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Όταν το τόξο του κυκλικού τομέα εκφράζεται σε ακτίνια , τότε ισχύει $\alpha = \frac{\pi\cdot\mu}{180^o}$
Οπότε η σχέση που δίνει το εμβαδόν του κυκλικού τομέα γράφεται: $E = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot R^2$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος το υπολογίζουμε αφαιρώντας από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ δηλαδή
δίδεται από την σχέση : $E_{\tau\mu} = E_\tau - E_{(OAB)} = \pi\cdot R^2\cdot\frac{\mu}{360} - \frac{1}{2}\cdot R^2\cdot\eta\mu\mu^o$.</td></tr>
</table>