ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

ΟΜΑΔΑ Α

Πράξεις μιγαδικών

1). Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x^2 - x - 9\cdot i$ και $w = 2 - y^2\cdot i$, $x, y \in R$.
α). Να βρείτε τους x, y ώστε z = w. β) Να βρείτε τον z.

2). Δίνεται ο μιγαδικός $z = 6\cdot i - (3 - 4\cdot i)\cdot x - 3\cdot y\cdot i - (3\cdot i - 2)\cdot x + (4 - 2\cdot y\cdot i)$, $x, y \in R$.
α). Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha + \beta\cdot i$.
β). Να λύσετε τις εξισώσεις :
i). $Re(z) = 0$ ii). $Im(z) = 0$ iii). $Re(z) = Im(z)$ iv). $z = 0$

3). Να μετασχηματιστούν οι παρακάτω παραστάσεις στην μορφή $\alpha + \beta\cdot i$.
α). $(2 + 3\cdot i)^2$ β). $(2 - i)^3$ γ). $(1 - i)^2\cdot(2 + 3\cdot i)$
δ). $(1 + i)^{20}$ ε). $(\sqrt{3} - i)^6$

4). Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta\cdot i$, τους μιγαδικούς αριθμούς :
α). $\frac{3}{4\cdot i}$ β). $\frac{1}{1-i}$ γ). $\frac{1-i}{i+1}$ δ). $\frac{12+8\cdot i}{2-3\cdot i}$

5). Να βρεθούν τα $x, y \in R$ ώστε
α). οι μιγαδικοί: $z_1 = x + 2\cdot y - i$ και $z_2 = 11 - (4\cdot x - y)\cdot i$, να είναι συζυγείς.
β). οι μιγαδικοί : $z_1 = x^2 + y + 4\cdot i$ και $z_2 = -3 + x^2\cdot y\cdot i$, να είναι συζυγείς

6). Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις
$A = i^{18}$, $B = i^{-273}$, $\Gamma = i^{1999} + i^{1998} + i^{1997}$,
$\Delta = i^{165} - i^{-21} - i^{-59}$ $E = i^{10} + i^{24} + i^{2009} + i^{11}$ $Z = i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2006}$

7). Να λύσετε στο R και στο C τις εξισώσεις :
α). $x^2 - x + 1 = 0$, β). $x^2 - 4x + 5 = 0$, γ). $x^2 + 1 = 0$, δ). $x^4 = 1$,

8). Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα
$z\cdot\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2\cdot i$.

9). Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός που ικανοποιεί την ισότητα $\bar{z} = z^2$.

10). Να λυθούν στο σύνολο C οι παρακάτω εξισώσεις :
α). $3\cdot z^2 + (4 - 6\cdot i)\cdot z - 8\cdot i = 0$ β). $z^2 + 2\cdot\bar{z} + 1 = 0$
γ). $(z + 3)^2 + (z - 1)^2 = 0$ δ). $z\cdot\bar{z} + 2\cdot i\cdot z - 2\cdot i = 0$

11). Η εξίσωση $z^2 + \alpha\cdot z + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in R$ έχει ρίζα τον μιγαδικό $1+\sqrt{2}\cdot i$.
α). Να βρείτε την άλλη ρίζα. β). Να βρείτε τα α και β.

12). Αν $\nu \in N^*$, να δείξετε ότι:
α). ο αριθμός $c = \frac{z^\nu + (\bar{z})^\nu}{z\cdot\bar{z} + 1}$ είναι πραγματικός,

β). ο αριθμός $u = \left(\frac{5+2i}{3-4i}\right)^{\nu} - \left(\frac{5-2i}{3+4i}\right)^{\nu}$ είναι φανταστικός

13). Να αποδείξετε ότι αν $z\cdot\bar{z} = w\cdot\bar{w} = 1$ τότε ο $u = \frac{z+w}{1+z\cdot w} \in R$.

14). Να αποδείξετε ότι αν $z\cdot\bar{z} = 1$, $z \neq 1$ τότε ο $u = \frac{z+1}{1-z} \in I$.

15). Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + y\cdot i$, $x, y \in R$.

α). Να γράψετε στη μορφή α + βi τον μιγαδικό $w = \frac{z+8\cdot i}{z+6}$.

β). Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν Im (w) = 0.

γ). Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν Re (w) = 0.

δ). Να δείξετε ότι η προηγούμενη σχέση (γ) είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του.

ε). Να δείξετε ότι ο προηγούμενος κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

16). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w για τους οποίους ο αριθμός $z = \frac{w-4\cdot i}{w-2} \in R$.

17). Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει σε κύκλο με κέντρο το O(1, 0) και ακτίνα R = 1, να δείξετε ότι και η εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{1}{z-1}$, με $z \neq -1$, ανήκει επίσης σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

18). Δίνεται η εξίσωση $ημ^2θ\cdot z^2 - 2ημθ\cdot z + 5 - 4\cdot ημ^2θ = 0$ με $θ \in (0, π)$.

α). Να λύσετε την εξίσωση.

β). Να δείξετε ότι καθώς το θ διατρέχει το διάστημα (0, π), οι εικόνες των ριζών της παραπάνω εξίσωσης κινούνται πάνω σε μία υπερβολή.

19). Αν η εικόνα του μιγαδικού z κινείται πάνω στην ευθεία y=2x-1 να βρείτε την εικόνα των μιγαδικών w που ικανοποιούν την σχέση $w = i\cdot z - (1 - i) - i^{2004}$.

20). Αν $z\in C$ και $f(z) = z^2+z$ να βρείτε την εικόνα των μιγαδικών z που ικανοποιούν την σχέση Re(f (z)) =1 + Re(z).

21). Να γραφούν στην μορφή α + i·β οι παραστάσεις:

α). $(2 + i)^2 - (5 - 2\cdot i) - 3\cdot i^3$ β). $2\cdot i - 5 + (-1 + 2\cdot i)^3 - 3\cdot i$.

γ). $(2 + 3\cdot i)^3 - (1 + i)^2$ δ). $1+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

γ). $\frac{3-5\cdot i}{1-2\cdot i}$ δ). $\frac{4-i^{3}}{2-3\cdot i^{2}}$ ε). $\frac{5-3\cdot i \quad 4-5\cdot i}{1-4\cdot i \quad 3-2\cdot i}$

στ). $\frac{(\alpha+i)^2-(\alpha-i)^2}{(3+i)^3+(3-i)^3}$ ζ). $\left(\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}+\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)$

22). α). Να βρεθούν οι α, β $\in$ R αν ισχύει η σχέση: $(3\cdot\alpha + 14\cdot\beta) + (2\cdot\alpha - \beta)\cdot i = 7 - i$.
β). Να υπολογίσετε τους α, β ώστε $(\alpha^2 - 2\cdot\beta + 1) + (\beta^2 - 2\cdot\alpha + 1) = 0$.

23). Δίνεται το πολυώνυμο $f(z) = z^2 - 5\cdot z - 2$. Να υπολογίσετε το $f(2 - i)$.

24). Αν α, β, γ $\in$ R και $(\alpha + \beta) - \gamma\cdot i = 5\cdot\gamma + (\alpha - \beta)\cdot i$ δείξτε ότι : $2\cdot\alpha - \beta = \gamma$.

25). Αν α, β, γ $\in$ R και $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{1}{\gamma}$, δείξτε ότι: $2\cdot(\alpha + \beta) + (\beta - \alpha)\cdot\gamma\cdot i = 5\cdot\alpha + i$.

26). Να βρεθούν οι x, y $\in$ R ώστε $(x + 3\cdot y\cdot i) + (y - 2\cdot x\cdot i) = 2 + 3\cdot i$.

27). Να βρεθούν οι x, y $\in$ R ώστε $(x + 2\cdot y\cdot i)^2 = x\cdot i$.

28). Δείξτε ότι $i^\nu + i^{\nu+1} + i^{\nu+2} + i^{\nu+3} = 0$ για κάθε ν $\in$N.

29). Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $B = \frac{1}{i^\nu} + \frac{1}{i^{\nu+1}} + \frac{1}{i^{\nu+2}} + \frac{1}{i^{\nu+3}}$, ν $\in$ N.

30). Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = (1 + i^{2\cdot\nu})\cdot(1 - i^\nu)$, ν $\in$ N.

31). Αν ισχύει $i^{3\cdot\nu+1} = i$, να βρεθεί (αν υπάρχει) η μορφή του ν $\in$ N.

32). Να λυθεί το σύστημα στο σύνολο των μιγαδικών C:
$\{ (1- i)\cdot x + i\cdot y = 2 - i$ και $(2 - i)\cdot x + (2 + i)\cdot y = 7 + 4\cdot i \}$

33). Δίνονται $f(x) = \alpha\cdot(24 - 7\cdot i)^x + \beta\cdot(24 + 7\cdot i)^x$ με x $\in$ N, $f(0) = 0$ και $f(1) = 14\cdot i$.
Δείξτε ότι: $f(3) = 23506\cdot i$.

34). Να λυθούν στο C οι εξισώσεις:
α). $z^2 + \bar{z} = 0$ β). $\bar{z} = - z$ γ). $\bar{z} = - 4\cdot z$.

35). Να λυθούν οι εξισώσεις : α). $3\cdot\bar{z} = 3\cdot z^3$. β). $z^2 = \bar{z}^{\,2}$.

36). Ομοίως η εξίσωση : $z^2 = \frac{20\cdot\sqrt{3} - 12\cdot i}{\sqrt{3} - 9\cdot i}$.

37). Ομοίως η εξίσωση: $z\cdot\bar{z} + 2\cdot(z - \bar{z}) = 20 + 8\cdot i$.

38). Έστω το πολυώνυμο $f(x) = x^2 + \alpha\cdot x + \beta$. Να βρεθούν τα α, β $\in$ R ώστε ο μιγαδικός αριθμός $4 - i$ να είναι ρίζα του f(x).

39). Αν $z_1, z_2 \in$ C με $z_2 \neq 1$, να βρεθούν οι συνθήκες για τις οποίες ο αριθμός $\omega = \frac{z_1 - \bar{z}_1\cdot z_2}{1 - z_2}$ είναι πραγματικός.

40). Να βρεθεί η σχέση ώστε ο αριθμός ω = $\dfrac{z-3}{z-2}$ να είναι φανταστικός.

41). Να δειχθεί ότι ο αριθμός $z = \bar{z}_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot \bar{z}_2$ είναι φανταστικός, όπου $z_1, z_2 \in C$, $z_1 \neq z_2$.

42). Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + y\cdot i$, όπου $x, y \in R$, $y \neq 0$, και που ικανοποιούν την σχέση $z\cdot\bar{z} = 1$ και την $z + \bar{z} = \lambda$, όπου $\lambda \in Z$.

43). Να δειχτεί ότι ο αριθμός $z = (6 + i\cdot\sqrt{5})^{\nu} + (6 - i\cdot\sqrt{5})^{\nu}$, όπου $\nu \in N^*$, είναι πραγματικός.

44). Να λυθεί στο C η εξίσωση : $\sqrt{z\cdot\bar{z}} + z = 8 + 4\cdot i$.

45). Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x και y, ώστε να είναι συζυγείς οι μιγαδικοί $z_1 = x + y^2 + 4\cdot i$ και $z_2 = 5 - x\cdot y^2\cdot i$.

46). Να βρείτε το γεωμετρικός τόπος των σημείων (x, y) σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις

α). $x + y\cdot i = \lambda\cdot(1 + i)$ β). $x - \lambda\cdot(y - 1)\cdot i = \mu\cdot\left(\dfrac{3}{2} - i\right)$ όπου $x, y, \lambda \in R$.

47). Να βρείτε το γ.τ. της εικόνας Μ(Ζ) αν ο αριθμός $\dfrac{z-i}{z+i}$ είναι :

α). Πραγματικός β). Φανταστικός

48). Έστω ω = $\dfrac{z+2\cdot i}{i\cdot z+2}$, όπου $z \in C$.

α). Αν οι εικόνες των ω και z συμπίπτουν τότε να βρείτε τον μιγαδικό ω.
β). Αν η εικόνα του z βρίσκεται στον φανταστικό άξονα τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του ω.
γ). Αν η εικόνα του z βρίσκεται στον πραγματικό άξονα τότε να βρείτε το γεωμετρικός τόπος της εικόνας του ω.

49). Αν $\bar{\alpha}\cdot z + \bar{z}\cdot\alpha + \gamma = 0$, όπου $\alpha, z \in C$, $\alpha \neq 0$ και $\gamma \in R$ τότε να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού z είναι ευθεία.

50). Έστω $z, w \in C$, με $z = w + \dfrac{1}{w}$. Αν η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο με κέντρο το Ο(0, 0) και ακτίνα ρ = 2 τότε να δείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες.

51). Να βρείτε τον μιγαδικό z, όταν $5 + z + i\cdot(1 + 2\cdot z) = 0$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση : $(5 + x)^2 + (1 + 2\cdot x)^2 = 0$. i). στοR. ii) στο C.

52). Αν $z = -\dfrac{1}{2} + i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $w = 1 + z$, να δειχθεί ότι

α). $1 + z + z^2 = 0$ β). $z^3 = 1$ γ). $w^{2\cdot\nu} = z^{\nu}$, για κάθε φυσικό ν.
δ). Να υπολογίσετε τους μιγαδικούς w^{300} και w^{333}.

53). Να υπολογιστεί το άθροισμα $S = i + i^2 + i^3 + \cdot\cdot\cdot + i^{2004}$.

54). Αν οι φυσικοί αριθμοί κ, λ, μ, ν διαιρούμενοι με το 4 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, να δείξετε ότι $i^k \cdot i^\lambda \cdot i^\mu \cdot i^\nu = 1$.

55). Να αποδειχθεί ότι : $\left(\frac{2+i}{1-2\cdot i}\right)^{2004} + \left(\frac{i-2}{1+2i}\right)^{2006} = 0$.

56). Να αποδειχθεί ότι : ($\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2\nu} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2\nu} = 2\cdot(-1)^\nu$.

57). Αν $x, y \in R$, $\nu \in N^*$ και $x - y\cdot i = \left(\sqrt{3}+i\sqrt{7}\right)^\nu$, να δειχθεί ότι : $x^2 + y^2 = 10^\nu$.

58). Αν $z \in C$ και $z^2 + z + 1 = 0$, να δείξετε ότι : $z^{2004} + \frac{1}{z^{2004}} = 2$

59). Οι μιγαδικοί z και w συνδέονται με τη σχέση $w = \frac{z+1}{z-1}$ $(z \neq 1)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z, αν Re(w) = Im(w).

60). Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των μιγαδικών αριθμών : α) $3 - 4\cdot i$ β). $-7 + 24\cdot i$.

61). Να δειχθεί ότι $1 + 2\cdot i + 3\cdot i^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + \nu\cdot i^{\nu-1} = \frac{i - \nu\cdot i^\nu - (\nu+1)\cdot i^{\nu+1}}{2}$ όπου $\nu \in N^*$.

62). Να λυθεί η εξίσωση $1 + 2\cdot z + 2\cdot z^2 + 2\cdot z^3 + z^4 = 0$, $z \in C$.

63). Αν $\nu \in N$, $1999 \le \nu \le 2002$ και $i^{3\cdot\nu+1} = 1$, να βρείτε την τιμή του ν.

64). Να βρείτε τις τιμές των x, y (αν οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x^2 + (y + 3)\cdot i$ και $w = x\cdot y - 2\cdot(i + x)$ είναι συζυγείς.

65). Αν $z, w \in C$ και $w \neq 0$, να δείξετε ότι

α). $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\overline{w}\cdot z + w\cdot\overline{z}}{2\cdot w\cdot\overline{w}}$ β). $\mathrm{Im}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\overline{w}\cdot z - w\cdot\overline{z}}{2\cdot i\cdot w\cdot\overline{w}}$.

66). Να προσδιορίσετε τον $\alpha \in R$, ώστε ο αριθμός $z = \frac{\alpha + (-i+2)\cdot i}{\alpha - (\alpha+i)\cdot i}$, να είναι πραγματικός.

67). Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 . Αν $z = \overline{z_1}\cdot(z_2 + z_3) + \overline{z_2}\cdot(z_3 + z_1) + \overline{z_3}\cdot(z_1 - z_2)$ και $W = \overline{z_1}\cdot(z_2 - z_3) + \overline{z_2}\cdot(z_3 + z_1) + \overline{z_3}\cdot(z_1 - z_2)$, να αποδείξετε ότι $z \in I$ και $w \in I$.

68). Για κάθε μιγαδικό z να δείξετε ότι : α). $(z + \overline{z})^2 \ge 0$ β). $(z - \overline{z})^2 \le 0$.

69). Να αποδείξετε ότι ο αριθμός w = $\dfrac{z^2+\bar{z}^2+z+\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}$ ∈ R, ∀ z ≠ 0.

70). Να βρείτε τους α, β, γ ∈ R, ώστε να είναι συζυγείς οι μιγαδικοί
z = $|\alpha+2|+\ |\gamma^2-4|+|\beta-2|\ \cdot i$ και w = 3 + $|\gamma-2|\cdot i$

71). Αν α + β·i = $(3 + i)^{10}$, α, β ∈ R,να αποδείξετε ότι : $\alpha^2+\beta^2 = 10^{10}$.

72). Να βρείτε των γεωμετρικό τόπων των εικόνων M(z) των μιγαδικών z, όταν :
$\mathrm{Re}\left(\dfrac{\bar{z}+4}{z+3}\right)$ = 0 και z ≠ –3.

73). Αν z ∈ C^*, να δείξετε ότι οι εικόνες των $\bar{z}, \dfrac{1}{z}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ -\bar{z}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι συνευθειακά σημεία.

74). Αν είναι $\dfrac{z}{\overline{z+2}} = 4\cdot\dfrac{z+2}{\bar{z}}$, να δείξετε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

75). Αν για τους μιγαδικούς z = α + β·i w = x + y·i, ισχύει $\alpha^2+\beta^2 = x^2+y^2 = 1$ να δείξετε ότι ο αριθμός u = $\left(\dfrac{z-w}{z+w}\right)^{2004}$ είναι πραγματικός.

76). Δίνεται η εξίσωση α·z + β·$\bar{z}$ + 2·γ = 0, με α, β ∈ C, γ ∈ R και β = $\bar{\alpha}$ ≠ 0.
Να αποδειχθεί ότι οι εικόνες των ριζών της παραπάνω εξίσωσης βρίσκονται σε μια ευθεία.

77). Αν η εικόνα του M του μιγαδικού αριθμού z ≠ 0 κινείται στον κύκλο (C) : $x^2 + y^2 = 1$,να δείξετε ότι η εικόνα N του μιγαδικού αριθμού w = $\dfrac{1}{\bar{z}}$ κινείται στον ίδιο κύκλο.

78). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(z) για τους οποίους ο αριθμός w = $\dfrac{i}{z^2+1}$ είναι πραγματικός.

79). Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στον κύκλο (C) : $x^2 + y^2 = 4$,να δείξετε ότι : η εικόνα του μιγαδικού αριθμού w = z + $\dfrac{4\cdot i}{\bar{z}}$ κινείται επίσης σε κύκλο.

80). Να λυθεί η εξίσωση $z^2 + 2\cdot\bar{z} + 1 = 0$, όπου z ∈ C.

81). Να λυθούν στο C οι ανισώσεις :
α). $z^2 - 4\cdot z + 3 < 0$ β). $6\cdot z - 5 < z^2$

82). Να βρείτε πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση :
A = $i^{3\cdot\nu-2} - i^{-3\cdot\nu+5}$, αν ν ∈ N.

83). Έστω ο μιγαδικός $z \neq 1$ για τον οποίο ισχύει : $3\cdot z^{2001} + 2001\cdot \bar{z}^{2001} = 2004$. Να αποδείξετε ότι :

α). $\bar{z}^{2001} = z^{2001} = 1$. (Υπόδειξη: Να πάρετε τα συζυγή των δύο μελών)

β). $z\cdot \bar{z} = 1$

γ), αριθμός $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ είναι φανταστικός.

94). Έστω το τριώνυμο $P(z) = \alpha\cdot z^2 + \beta\cdot z + \gamma$, με $\alpha \neq 0$, διακρίνουσα $\Delta < 0$ και $\alpha, \beta, \gamma \in R$,ενώ ο $z \in C$. Αν z_1, z_2 λύσεις της $P(z) = 0$:

α). Να δείξετε ότι $z_1 + z_2 \in R$.

β).Να δείξετε ότι $z_1^{\nu} + z_2^{\nu}$ με $\nu \in N^*$ είναι πραγματικός αριθμός.

γ). Αν $A(z_1)$, $B(z_2)$ οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα να δείξετε ότι : $d(A, B) = \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{|\alpha|}$.

δ). Αν $\Gamma(z_1 + z_2)$ η εικόνα του $z_1 + z_2$ τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι :

$E_{(AB\Gamma)} = \dfrac{|\beta|\cdot\sqrt{|\Delta|}}{4\cdot\alpha^2}$.

95). Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{(z-1)\cdot(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$, με $z \in C$ και $Re(z) \neq 0$.

α). Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{-1}{\bar{z}}\right) = f(z)$.

β). Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha\cdot x + \beta\cdot y\cdot i$, με $\alpha, \beta, x, y \in R$ και $\alpha\cdot\beta\cdot x \neq 0$ ικανοποιούν τη σχέση $Re[f(z)] = 0$.

96). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που είναι εικόνες των ριζών της εξίσωσης, $z^2 + 4\cdot z = \overline{z^2} + 4\cdot\bar{z}$.

97). Δίνονται οι μιγαδικοί z και w που συνδέονται με τη σχέση $\bar{w} = \dfrac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}}$.Να αποδείξετε ότι $Im(z) > 0 \Leftrightarrow Im(w) < 0$.

98). Να δειχθεί ότι $(3+4\cdot i)^{4\cdot\nu} + (4+3\cdot i)^{4\cdot\nu} \in R$, για κάθε $\nu \in N^*$.

99). Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z = \dfrac{\lambda + 2\cdot i}{1+\lambda\cdot i}$, $\lambda \in R$ ανήκουν σε έναν ορισμένο κύκλο.

100). Αν ισχύει $z^{100} + z^{99} + z^{98} + \cdots + z + 1 = 0$, να δείξετε ότι $z + \dfrac{1}{z} \in R$ (Υπ.Ν.δ.ο: $|z| = 1$)

101). Αν $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = \sqrt{3}$, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $O(0, 0)$, $A(z_1)$ και $B(z_2)$. (Υπ. Να θεωρήσετε άγνωστο το $\dfrac{z_1}{z_2}$)

102). Αν z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 2\cdot x + 2 = 0$, να βρείτε κάθε $\nu \in N^*$, ώστε $z_1^{\nu} + z_2^{\nu} = 0$.

103). Ένα κινητό κινείται στο μιγαδικό επίπεδο, ώστε την τυχαία χρονική στιγμή $t \geq 0$ να βρίσκεται στο σημείο που είναι εικόνα του μιγαδικού $z = 2\cdot t - 1 + (t - 3)\cdot i$:

α). Να δείξετε ότι το κινητό κινείται πάνω σε μια ορισμένη ευθεία.

β). Να βρείτε τη χρονική στιγμή που το κινητό απέχει από την αρχή των αξόνων τη μικρότερη απόσταση.

104). Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και w_1 τέτοιους ώστε $w = z - z\cdot i$ και $w_1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha\cdot i$, $\alpha \in R^*$. Να αποδείξετε ότι, το α μεταβάλλεται στο R^* και ισχύει $w = \overline{w_1}$ τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.

104). Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{(1+z)^\nu}{1+z^\nu}$, $\nu \in N^*$.

α). Να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)$.

β). Να βρείτε για ποιες τιμές του ν ορίζεται το f(i).

γ). Να δείξετε ότι το f(i) είναι πραγματικός για κάθε επιτρεπτό ν.

105). Δίνεται το πολυώνυμο $P(z) = z^{2001} - z^{2002} + z^{2003} - 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο w(z), με πραγματικούς συντελεστές ώστε: $P(z) = (z^2 + 1)\cdot w(z)$.

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

1). Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

$$z_1 = \left[\frac{-3\cdot i\cdot\ 2+2\cdot i\ \cdot\ -\sqrt{3}-i}{3-3\cdot i}\right]^4 ,\quad z_2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}\cdot\left(\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^{30} \qquad z_3 = \frac{2+i^{\ 2}\cdot\ 1-i}{1+3\cdot i^{\ 4}}$$

$$z_4 = \frac{-3+2i}{(1-i)^2-2-i} \qquad z_5 = \frac{(1+i)^2\cdot(1-i)^4}{2\cdot\sqrt{7}+6\cdot i} \qquad z_6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{15} \qquad z_7 = \frac{\eta\mu x + i\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x + i\cdot\eta\mu x}$$

2). Αν $\alpha + \beta\cdot i = (3 + 2\cdot i)\cdot(2 - 3\cdot i)$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\alpha^2 + \beta^2$.

3). α).Αν $|z + \alpha\cdot i| = |z + \beta\cdot i|$ με $\alpha \neq \beta$ να δειχτεί ότι $z - \overline{z} = -(\alpha + \beta)\cdot i$.

β). Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $8 + z^2 = (\sqrt{3}\cdot z^2 - 6)\cdot i$, να βρείτε το $|z|$.

4). α). Βρείτε το μέτρο του $z = \left(\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^\nu$, $\nu \in N$.

β). Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \frac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2}$, και $w = \sqrt{2}\cdot(1 + i)$. Να υπολογίσετε τους

z^2 , $z\cdot\overline{w}$, $\frac{z^2}{w}$, $z^3\cdot w^5$.

5). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει

i). $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ii). $|z^2| = z^2$ iii). $|(1+i)\cdot z| = 2\cdot|z|$

iv). $|(1+i)\cdot \bar{z}| = |(1-i)\cdot z|$ v). $|z| = |-i\cdot \bar{z}|$.

6). Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα ρ = 1. Να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού αριθμού w = $\dfrac{\lambda\cdot z - i}{i\cdot z + \lambda}$, $\lambda \in R$.

7). α). Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύει $|z| = |w| = 1$ και $z + w + 1 = z\cdot w$.

β). Αν $z, w \in C$ και $\lambda \in R$ με $|z| = |w| = 1$ ν.δ.ο: $|z + w + \lambda\cdot z\cdot w - 1| = |z + w - z\cdot w + \lambda|$.

8). α). Αν $\alpha \in R$ και z = $\dfrac{1+\alpha\cdot i}{1-\alpha\cdot i}$ να δείξετε ότι $|z| = 1$.

β). Αν $\lambda \in R$ και $z \notin R$, να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού w = $\dfrac{-\lambda\cdot i + i\cdot \bar{z}}{3\cdot\lambda - 3\cdot z}$.

9). Να δειχθούν οι σχέσεις:

α). $|z_1\cdot \bar{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 1+|z_1|^2 \cdot 1+|z_2|^2$

β). $|z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\cdot \bar{z}_2 - \bar{z}_1\cdot z_2 = |z_1 - z_2|^2$

γ). Να δειχθεί ότι $|z_1 + \bar{z}_2| = |\bar{z}_1 - z_2| \Rightarrow z_1\cdot z_2 + \overline{z_1\cdot z_2} = 0$

δ). Να αποδείξετε : $|\bar{z}^2 + i| = |i - z^2|$.

10). Να δειχτεί ότι:

α). $|z - 8| = 2\cdot|z - 2| \Leftrightarrow |z| = 4$.

β). $|z - 10| = 3\cdot|z - 2| \Rightarrow |z - 1| = 3$

γ). $|7\cdot z - i| = |i\cdot z + 7| \Rightarrow |z| = 1$

δ). $|5\cdot z - 1| = |z - 5| \Rightarrow |z| = 1$

ε). $|z + 64| = 8\cdot|z + 1| \Rightarrow |z| = 8$

στ) $|z - 9| = 3 \Rightarrow |z| = 3$.

11). Να λυθούν οι ανισώσεις:

α). $|z - 3| > |z + 2|$ β). $|z - 6| > |z + 5|$.

12). Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z, ώστε: $|z + 5\cdot i| = |z + 3|$.

13). Αν $|z| = 1$ να δειχτεί ότι $\left|\dfrac{2\cdot z - i}{i\cdot z + 2}\right| = 1$.

14). Βρείτε τον μιγαδικό, για τον οποίο ισχύει:

i). $|z - 1| = |z - 2| = |z - i|$ ii). $|z| = \dfrac{1}{|z|} = |z - 1|$

15). Αν $z_1, z_2 \in C$ και $|z_1| < 1$ και $|z_2| < 1$, δείξτε ότι: $|z_1 - z_2| < |1 - \bar{z}_1 \cdot z_2|$.

16). Αν $|z_1| = |z_2| = 1$, τότε να αποδειχτεί ότι ο αριθμός $z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2}$ με $1 + z_1 \cdot z_2 \neq 0$ είναι πραγματικός.

17). Αν $|\omega + i| = |\omega - i|$ να δειχθεί ότι ο ω είναι πραγματικός.

18). Αν $|z| = 1$ $(z \neq 1)$ να δειχθεί ότι ο $\omega = \frac{1+z}{z-1}$ είναι φανταστικός.

19). Αν $|z_1| = |z_2|$, $z_1 \neq z_2$ να δειχθεί ότι ο $\omega = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ είναι φανταστικός.

20). Αν $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ να δειχθεί ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

21). Αν $z_1 \cdot |z_2| - z_2 \cdot |z_1| = 0$ και $z_1 \cdot |z_2| + z_2 \cdot |z_1| = 0$ να δείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = 0$.

22). Να δείξετε ότι:

α). $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2 \cdot \mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$.

β). $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}\ z_1 \cdot \bar{z}_2$

23). Αν $|z_1| = |z_2| = 1$ τότε ισχύει: $z_1 + z_2 - z_1 \cdot z_2 + 1 = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 + z_1 \cdot z_2 - 1 = 0$

24). Αν $|z_1| = 6$ και $z_2 = 4 + 3 \cdot i$ να βρείτε την μεγαλύτερη και την μικρότερη τιμή του $|z_1 + z_2|$.

25). Αν $z = \alpha + \beta \cdot i$ με $\alpha, \beta \in R$ και ισχύει $|z| \leq 1$ να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z - 3|$.

26). i). Αν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ τότε $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

ii). Αν $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1$ τότε οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

27). Αν $\alpha \geq 1$, να λυθεί η εξίσωση: $z + \alpha \cdot |z + 1| + i = 0$.

28). Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$

29). Δείξτε ότι:

α). αν $z_1 : z_2 > 0$ τότε $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

β). αν $z_1 : z_2 < 0$ τότε $|z_1 + z_2| = ||z_1| - |z_2||$

γ). αν $z_1 : z_2 > 0$ τότε $|z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2||$

δ). αν $z_1 : z_2 < 0$ τότε $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$

30). Αν $z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow |z| = |z + 1| = 1$.

31). Να λυθεί το σύστημα: $\left\{ \left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \left|\frac{z-2}{z+3}\right| = 2 \right\}$

32). Να δειχτεί ότι $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} = \frac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2} + i\cdot\frac{z_1\cdot\overline{z_2}-\overline{z_1}\cdot z_2}{|z_1-z_2|^2}$

33). Να δειχτεί ότι $|w + z|^2 + |w - z|^2 = 2\cdot|w|^2 + 2\cdot|z|^2$.

34). Αν z και z′ είναι δύο μιγαδικοί με $|z| = |z'| = 1$, $z_1 = z + z' + \alpha\cdot z\cdot z' + 1$ και $z_2 = z + z' + z\cdot z' + \alpha$, $\alpha \in R$ να αποδείξετε ότι
i). $z_1 = z\cdot z'\cdot \overline{z_2}$ ii). $|z_1| = |z_2|$

35). Αν $\left|z+\frac{1}{z}\right| = |z| \Rightarrow \text{Re}\ z^2 = -\frac{1}{2}$.

36). Αν $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2| \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3}\cdot|z_1|$.

37). Αν $z_1, z_2 \in C$, $\lambda > 0$ τότε: $|z_1 + z_2|^2 < (1+\lambda)\cdot|z_1|^2 + \left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\cdot|z_2|^2$.

38). Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq 1$ και έστω $f(z) = \frac{2+i\cdot\overline{z}}{1-\overline{z}}$.

α). Να δείξετε ότι : $\left|\frac{f(z)-2}{f(z)+i}\right| = |z|$

β). Αν $|z| = 1$ και Μ είναι η εικόνα του f(z) στο μιγαδικό επίπεδο,
Να δείξετε ότι : το Μ ανήκει σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

39). Αν $\alpha, \beta \in Z$, να δείξετε ότι : ο μιγαδικός $z = \alpha^2 - \beta^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot i$, έχει μέτρο φυσικό αριθμό.

40). Αν $z, w \in C$ και $|z| = |w|$, να δείξετε ότι : ο αριθμός $w = \frac{1-z+z^2}{1+z+z^2}$ είναι πραγματικός.

41). Να λυθεί η εξίσωση $z^2 + |z| = 0$.

42). Να αποδειχθεί ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει ότι : $|\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)| \leq \sqrt{2}\cdot|z|$

43). Αν είναι $|z - 2| = 1$ και $|z - 1| \leq 1$, να αποδείξετε ότι: $1 \leq |z| < \sqrt{3}$.

44). Να λυθεί η εξίσωση : $2\cdot z^2 + 2\cdot z\cdot i + |z| + 3 = 0$.

45). Να λυθεί η εξίσωση : $2\cdot|z| - 4\cdot\alpha\cdot z + 1 + \alpha\cdot i = 0$, $(\alpha \geq 0)$.

46). Να λυθεί η εξίσωση : $|z|^2 - 2\cdot i\cdot z + 2\cdot\lambda\cdot(1 + i) = 0$ αν $\lambda \in R$.

47). Να λυθεί η εξίσωση: $z^2 - 3\cdot|z| + \alpha^2 = 0$, $\alpha \in R^+$.

48). Να λυθεί στο C η εξίσωση $|z| + z = 2 + i$.

49). Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύει η σχέση $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 - z|$.

50). Αν $z, w \in C$ και $|z| = 2$, $|w| = 3$ και $|z + w| = 4$, να βρείτε το $|z - w|$.

51). Αν $|z| = 2$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |i\cdot z + 2|^2 + |2\cdot i - \bar{z}|^2$.

52). Να δείξετε ότι ο αριθμός $w = \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z}$, όπου $z \in C^*$, είναι πραγματικός.

53). Αν είναι $w = z + \frac{1}{z}$, με $z \in C^*$, να δείξετε ότι, $w \in R \Leftrightarrow |z| = 1$ ή $z \in R$.

54). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $z \in C$ για τον οποίο ισχύει :
α). $|z + 3| \leq |z - 5|$ β). $|z + i| \geq |z - 5\cdot i|$ γ). $|z + 2 - 3\cdot i| \leq 2$
δ). $\left|\frac{\bar{z}}{1-z}\right| > 1$ ε). $3 \leq |z + i| \leq 4$.

55). Αν $z = 3 - 4\cdot i$ και $|w| = 2$, να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή της παράστασης
i). $|z + w|$ ii). $|z - w|$.

56). Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα $\rho = 1$, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{3\cdot z + i}{i\cdot z - 3}$.

57). Ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς που ικανοποιούν τη σχέση $|z + 1 - i| = \sqrt{2}$, έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο δυνατό μέτρο ;

58). Ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς που ικανοποιούν τη σχέση $|i - z| = |z + 1 - 2\cdot i|$ έχει το ελάχιστο δυνατό μέτρο;

59). Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2\cdot|z_1 - z_2|\cdot x + (1 + |z_1|^2)\cdot(1 + |z_2|^2)$, με $z_1, z_2 \in$, $x \in R$. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in R$.

60). Έστω $\alpha, \beta \in C$ με $\alpha^2\cdot\beta^2 \neq -1$ και $|\alpha| = |\beta| = 1$. Να δείξετε ότι ο αριθμός $w = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{1 + \alpha^2\cdot\beta^2}$

Είναι πραγματικός.

61). Αν z ∈ C, $|z|=1$ και $|z+1|=1$, να δείξετε ότι $z^3 = 1$ και αντίστροφα.

62). Αν α, β ∈ C, λ ∈ R και $|\alpha|=|\beta|=1$, να δείξετε ότι οι αριθμοί z = α + β + λ·α·β + 1 και w = α + β + α·β + λ, έχουν ίσα μέτρα.

63). Αν z, w ∈ C με $|z|=|w|$ Αν z,w ∈ C να δείξετε ότι ο αριθμός w = $\dfrac{(z+w)^{2004}}{(z-w)^{2004}}$ είναι πραγματικός ενώ ο αριθμός w = $\dfrac{(z+w)^{2003}}{(z-w)^{2003}}$ είναι φανταστικός.

64). Δίνονται οι μιγαδικοί α, β, γ των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Να δειχθεί ότι $\mathrm{Im}\left[\dfrac{(\alpha+\beta)\cdot(\beta+\gamma)\cdot(\gamma+\alpha)}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}\right]=0$.

65). Αν z, w ∈ C και $|z+w|=|z|=|w|$ να δείξετε ότι : $|z-w|=\sqrt{3}\cdot|z|$.

66). Αν z, w ∈ C, να δείξετε ότι :: $|z+w|=|z|+|w| \Leftrightarrow |z-w|=\big||z|-|w|\big|$.

67). Αν z, w ∈ C, να δείξετε ότι :: $|1+z\cdot\overline{w}|^2+|z-w|^2 = 1+|z|^2 \cdot 1+|w|^2$.

68). Να υπολογιστεί το μέτρο του z αν ισχύει : $|z+16|=4\cdot|z+1|$.

69). Αν z,w ∈ C με μέτρο μικρότερο του 1, να δείξετε ότι : $|z-w|<|1-w\cdot\overline{z}|$.

70). Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|3\cdot z-9|=|z-1|$, να δειχθεί ότι $|z-2|=3$.

71). Αν z ∈ C, να αποδείξετε την ισοδυναμία : $\big|z+|z|\big|+\big|z-|z|\big|=2|z| \Leftrightarrow z\in R$.
(Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία της ισοδυναμίας.).

72). Αν z, w ∈ C − {i} και $z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots z_\nu$ ∈ C − {i} να δείξετε ότι :

α). $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right|<1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)<0$.

β). αν ισχύει η σχέση: $\left|\dfrac{z_1+i}{z_1-i}\right|+\left|\dfrac{z_2+i}{z_2-i}\right|+\ldots\ldots\left|\dfrac{z_\nu+i}{z_\nu-i}\right|<1$, να δείξετε ότι : $\left|\dfrac{(z_1+z_2+\ldots\ldots+z_\nu)+i}{(z_1+z_2+\ldots\ldots z_\nu)-i}\right|<1$.

73). Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τους μιγαδικούς για τους οποίους ισχύει :
α). $|z|=3$ β). $|z-1+3\cdot i|=1$ γ). $|z-5|\le 5$ δ). $|z+2+i|>2$.

74). Να προσδιορίσετε στο μιγαδικό επίπεδο το χωρίο στο οποίο ικανοποιούνται τα συστήματα των Ανισοτήτων :
α). $|z+2|>2$ *και* $|z+2\cdot i|<2$ β). $|z-1|\le 2$ *και* $\mathrm{Re}(z)\ge 1$

75). Να λυθεί το σύστημα : { $|z+i+1|=2 \quad |z+3|=|z-1|$ }.

76). Να αποδείξετε ότι για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z-\alpha\cdot i|=|z-\beta\cdot i|$, α, β ∈ R και α ≠ β αν και μόνον αν Im(z) = $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την παραπάνω πρόταση.

77). Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|=3$,,να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Α = $|z-3\cdot i|^2+|z+3\cdot i|^2$. Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία όταν z ≠ ± 3·i.

78). Αν z,w ∈ C, να αποδείξετε την ταυτότητα $|z|^2+|z-w|^2=2\cdot\left|z-\dfrac{w}{2}\right|^2+\dfrac{|w|^2}{2}$ (1)

Ποια γεωμετρική πρόταση εκφράζει η (1) ;

79). Έστω z_1 = 5·i και z_2 ένας μιγαδικός με $|z_2|=2$.

α). Να βρείτε για ποιες τιμές του z_2 η παράσταση $|z_1-z_2|$ γίνεται

i). μέγιστη ii). ελάχιστη.

β). Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα παραπάνω αποτελέσματα.

80). Να βρείτε τον γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει :

i). $|z+3|=|z-5+3\cdot i|$ ii). $|z-3|\geq|z-5+3\cdot i|$ iii). $\big||z-5|-|z+5|\big|=8$

iv). $|z-2\cdot i|+|z-4+i|=8$ v). $|z-2\cdot i|+|z-4+i|=5$ vi). $|z-2\cdot i|+|z-4+i|=3$.

81). Να βρείτε τον γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη σχέση :

$|z+3|=|z-5+3\cdot i|$ (1).

Από τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν την (1), ποιος έχει το μικρότερο μέτρο ;

82). Από τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν τη σχέση $|z-2-i|=3\sqrt{10}$, να βρεθούν εκείνοι οι οποίοι Έχουν : α). Το ελάχιστο μέτρο. β). Το μέγιστο μέτρο.

84). Δίνεται ο μιγαδικός z = (2·x – 3) + (2·y – 1)·i. με x, y ∈ R. Αν $|2\cdot z-1+3\cdot i|=3$, να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) είναι κύκλος. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου του παραπάνω κύκλου και την ακτίνα του.

85). Έστω z_1, z_2, z_3, z_4 ∈ C και M_1, M_2, M_3, M_4 οι εικόνες τους αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο.

86). α). Να δείξετε ότι : $M_1M_2 \,//\, M_3M_4 \Leftrightarrow \dfrac{z_2-z_1}{z_4-z_3} \in$ R.

β). Να δείξετε ότι : $M_1M_2 \perp M_3M_4 \Leftrightarrow \dfrac{z_2-z_1}{z_4-z_3} \in$ I.

γ). Να δείξετε ότι : M_1, M_2, M_3 συνευθειακά όταν $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right)=0$.

87). Να βρείτε τον γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών 1, z, 1 + z^2, των οποίων οι εικόνες τους αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο είναι συνευθειακά σημεία.

88). Να βρείτε τον γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη σχέση: $|4\cdot z - i| = 2\cdot|i + \bar{z}|$.

89). Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύουν $|4\cdot z_1 - i| = 2\cdot|i + \bar{z}_1|$ και $|4\cdot z_2 - i| = 2\cdot|i + \bar{z}_2|$, να δείξετε ότι $|z_1 - z_2| \le 1$.

90). Αν z = 9 – 12·i, και $|w|$ = 4, να δείξετε ότι : $11 \le |w + z| \le 19$.

91). Αν $|z| \le 5$. να δείξετε ότι : $1 \le |z - 6| \le 11$.

92). Αν $z_1, z_2 \in C$ να δείξετε ότι : $|z_1| + |z_2| \le |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$.

93). Δίνεται ο μιγαδικός z με $|z - 2| \le 1$. να δείξετε ότι : $2 \le |z - 5| \le 4$.

94). Αν $z \in C$, με $|z| \le \sqrt{3} - 1$. να δείξετε ότι : $|2\cdot z\cdot \eta\mu\theta + z^2| \le 2$ ($\theta \in R$).

95). Να λυθούν οι εξισώσεις: $\bar{z}^{5}\cdot z^9 = 1$, $z \in C$. $z^3 = |z|$, $z \in C$.

96). Αν η εξίσωση $(i\cdot z - 2)^\nu = w\cdot(z + 2\cdot i)^\nu$ με άγνωστο τον z, $\nu \in N^*$, έχει πραγματική ρίζα, να δειχθεί ότι : $|w| = 1$.

97). Να εξετάσετε αν η εξίσωση $(1 + i\cdot z)^\nu = \dfrac{2 + 3\cdot i}{2\cdot\sqrt{3} - i}$, έχει πραγματική ρίζα.

98). Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(1-\lambda i)^\nu = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot i$ με $\lambda \in R$ και $\nu \in N^*$ δεν έχει λύση.

99). Έστω z = α + β·i, α, β ∈ R. Δίνεται ακόμα ότι η εξίσωση $\left(\dfrac{w - 2\cdot i}{w + 2\cdot i}\right)^\nu = z$ (1), με άγνωστο τον w, έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

α). Να δειχθεί ότι : $|z| = 1$.

β). Όλες οι ρίζες της (1) είναι πραγματικές.

100). Έστω α, β, γ, δ, x, y ∈ R^*. Αν $\alpha + \beta\cdot i = (x + y\cdot i)^{2001}$ και $\gamma + \delta i = (y + x\cdot i)^{2000}$, να δειχθεί ότι : $\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma^2 + \delta^2} = x^2 + y^2$.

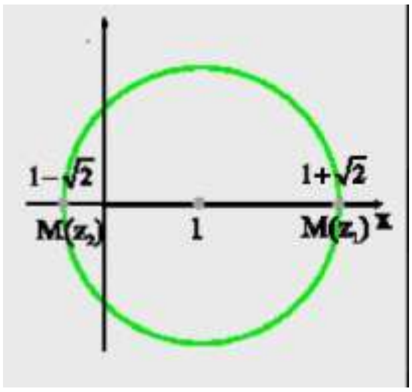
101). Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha^2}$, α ∈ R. Να δειχθεί ότι : για κάθε x, y ∈ R Ισχύει : $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

ΟΜΑΔΑ Β

1). Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση : $|z - 1| = 1 + Re(z)$ και η συνάρτηση f με $f(z) = z^2 - z$.
  α). Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός μετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η παραβολή με εξίσωση: $y^2 = 4 \cdot x$.
  β). Να βρείτε τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν την σχέση (1) και για τους οποίους ισχύει $f(z) = -4 + 2 \cdot i$.
  γ). Να βρείτε τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν την σχέση (1) και για τους οποίους ισχύει $|f(z)| = 3 \cdot |\bar{z}|$.

2). Δίδεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z+1}{z}$, όπου $z = x + i \cdot y$, με x, y πραγματικούς και $z \neq 0$.
  α). Να γραφεί ο μιγαδικός z στη μορφή $\alpha + i \cdot \beta$.
  β). Να αποδειχθεί η ισοδυναμία :
  f(z) πραγματικός $\Leftrightarrow$ z πραγματικός
  γ). Αν ισχύει $f(z) \cdot f(\bar{z}) = 2$, να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος κέντρου K(1, 0) και ακτίνας $R = \sqrt{2}$.
  δ). Για τους μιγαδικούς του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του μέτρου $|f(z) - 1|$.



3). Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq 0$ και η συνάρτηση $f : N^* \to C$ με $f(\nu) = (i^{\nu} - 1]) \cdot z$.
  α). Να δείξετε ότι για κάθε: $\nu \in N^*$ ισχύει: $f(\nu) \cdot f(\nu + 1) \cdot f(\nu + 2) \cdot f(\nu + 3) = 0$.
  β). Αν ισχύει $f(3) = -1 - 3 \cdot i$, να δείξετε ότι: $z = 2 + i$.
  γ). Για τον μιγαδικό z του προηγούμενου ερωτήματος να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού $w = f(\nu + 1) - f(\nu)$ διαφορετικό για κάθε $\nu \in N^*$.

4). Δίνονται οι μιγαδικοί z, w και $u = z \cdot w$.
  α). Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν ισχύει $z = \bar{z}$.
  β). Αν για τους z, w ισχύει $|z + \bar{w}| = |\bar{z} + w|$, να δείξετε ότι ο αριθμός $u = z \cdot w$ είναι φανταστικός.
  γ). Αν επιπλέον δίδεται ότι $w = 2 + i$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

5). Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και $w = \frac{z + 3 \cdot i}{z + 3}$.
  α). Αν $z = x + y \cdot i$, $x, y \in R$ να γράψετε τον w στην μορφή $\alpha + i \cdot \beta$.
  β). Να δείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z, είναι η ευθεία $y = -x - 3$.
  γ). Να δείξετε ότι αν $|w| = 2$, τότε η εικόνα του z, κινείται σε κύκλο, του οποίον να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

6). Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί, για τους οποίους ισχύει: $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $z_1 \neq z_2$ και $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$.

α). Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $w = \frac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

β). Να δείξετε ότι $\left|\frac{i \cdot z_1}{z_1 - z_2}\right| + \left|\frac{\overline{z_2}}{z_1 + z_2}\right| \geq 1$.

γ). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z_1 αν $z_2 = 1 + i$.

7). Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq 0$, $w = \frac{1}{z}$ και $u = z^2$, τέτοιοι ώστε οι εικόνες των z και w να σχηματίζουν με την αρχή των αξόνων Ο, ορθογώνιο τρίγωνο στο Ο.

α). Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ή διχοτόμοι των αξόνων χωρίς το σημείο τομής του.

β). Να δείξετε ότι ο u είναι φανταστικός.

γ). Αν ισχύει $\left|z - \frac{1}{z}\right| = \sqrt{2}$, να. βρείτε το μέτρο του u.

8). Αν $z \in C$ και ισχύει $(z + i)^{17} + (2 \cdot i)^{11} \cdot (\overline{z} - i)^6 = 0$, να αποδείξετε ότι :

α). $|z + i| = 2$ β). $w = \frac{(z+i)^2 + 4}{z+i} \in R$ γ). $u = (z + i)^{23} \in I$.

9). α). Να λύσετε στο C την εξίσωση $z^2 - 2 \cdot |z| = 0$.

β). Να σχεδιάσετε στο μιγαδικό επίπεδο το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του $z \in C$, αν $|z - 2| = |z - 4 \cdot i|$.

10). Δίνεται ο μιγαδικός $z = x + i \cdot y$, όπου $x, y \in R$ και $x \neq 0$, $y \neq 2$. Αν $\left|\frac{z - i}{z + 2 \cdot i}\right| = 2 = 2$, τότε

α). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.

β). Να προσδιορίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$ και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία.

11). Έστω ότι για το μιγαδικό z ισχύει $|z - 4 + 9 \cdot i| \leq 2$. Να αποδείξετε ότι: $3 \leq |z - 7 + 5 \cdot i| \leq 7$.

12). α). Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$ αν $|z - 5| \leq 2$.

β). Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε να αποδείξετε ότι : $(z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2)^2 \leq 0$.

13). Δίνεται ο μιγαδικός z και έστω : $f(z) = \frac{2 + i \cdot \overline{z}}{1 - \overline{z}}$, $z \neq 1$.

α). Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = [f(2)]^{2004}$ είναι πραγματικός.

β).Να αποδείξετε ότι: $\left|\frac{f(z) - 2}{f(z) + i}\right| = |z|$.

γ). Αν $|z| = 1$ και Μ είναι η εικόνα του $f(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το Μ ανήκει σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

14). α). Αν για τον μιγαδικό z ισχύουν $|z^2 + 1| < 1$ και $|z + 1| < 1$, να δειχθεί ότι $|z| \le 1$.

β).Αν $z_1, z_2 \in C$ με $z_2 \neq 0$, να δείξετε την ισοδυναμία: $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in C$

11). Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{x + 3\cdot i}{2 - i}$, $x \in R$.

α). Να βρείτε το x, ώστε ο αριθμός z να είναι φανταστικός.

β). Αν $x = -6$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

γ). Αν $x = 4$, να βρείτε το $|\overline{z}|$.

12). Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4\cdot x + 13 = 0$ (1)

α). Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση (1).

β). Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$A = |z_1|^2 - 2|z_1 \cdot z_2| + \sqrt{13}|\overline{z}_2| + i^{2006}$.

γ). Αν $z_1 = 2 + 3\cdot i$, τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει : $|z - z_1| = 5$.

13). Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2 + \alpha \cdot i}{\alpha + 2 \cdot i}$, με $\alpha \in R$.

α). Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα $\rho = 1$.

β). Έστω z_1 , z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $\frac{2 + \alpha \cdot i}{\alpha + 2 \cdot i}$, για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

i). Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 .

ii). Να αποδειχθεί ότι ισχύει : $z_1^{2\nu} = -z_2^{\nu}$, για κάθε φυσικό αριθμό ν.

14). Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4 - z)^{10} = z^{10}$

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x = 2$.

15). Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α). Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$.

β). Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός .

γ). Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} \cdot |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$.

16). α). Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1 + z_2 = 4 + 4\cdot i$ και $2\cdot z_1 - \overline{z}_2 = 5 + 5\cdot i$, να βρείτε τους z_1, z_2.

β). Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $|z - 1 - 3i| \le \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \le \sqrt{2}$:

i). να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε $z = w$ και

ii). να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

17). Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z = α + β·i, όπου α, β ∈ R και w = 3·z – $i\cdot\bar{z}$ + 4, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α). Να αποδείξετε ότι Re(w) = 3·α – β + 4, Im(w) = 3β – α.

β). Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y = x – 12, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y = x – 2.

18). Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z = x + y·i, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και w = $\dfrac{i\cdot\ i+z}{i-z}$ με z ≠ i

Να αποδείξετε ότι :

α). w = $\dfrac{2x}{x^2+\ y-1^{\ 2}}+\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+\ y-1^{\ 2}}\cdot i$.

β). Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου O(0 , 0) και ακτίνας ρ_1 = 1 και

γ). αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου O(0, 0) και ακτίνας ρ_2 = 1.

19). α). Αν $i^2 = -1$ τότε $i^{2012} = 1$ Σ – Λ

β). Έστω w = α + β·i,τότε ποιο από τα παρακάτω είναι λάθος

[Α]. $|w| = |\bar{w}|$ [Β]. $|w| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ [Γ]. $|w^2| = w^2$ [Δ]. $|w^2| = \left|-\overline{w}^2\right|$

γ). Τι παριστάνουν οι εξισώσεις :

[Α]. $|z-2+3\cdot i| = 5$ [Β]. $|z-5+2\cdot i| = |z+3-6\cdot i|$, όπου z = x + y·i, με x,y ∈ R.

δ). Αν $|\bar{z}| = 2$ και $|-w| = 5$

i). ποια είναι η μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

[α]. 5, [β]. 3 [γ]. 7 [δ]. 2

ii). ποια είναι η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

[α]. –3 [β]. 3 [γ]. 2 [δ]. –5

20). Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης

$(-2 + i)^{20}\cdot(z - 2004)^{2008} = (\sqrt{3}+i\cdot\sqrt{2})^{20}\cdot(z\text{-}2008\text{-}2i)^{2008}$ ανήκουν σε ευθεία και να προσδιορίσετε την εξίσωση της.

21). Δίνεται η συνάρτηση f(z) = $\dfrac{z+2\cdot i}{\bar{z}-2\cdot i}$, z ∈ C.

i). Δείξετε ότι $|f(z)| = 1$

ii).Αν ισχύει η ισότητα $\overline{f(z)} = f\ \ \bar{z}$ να αποδείξετε ότι z ∈ I.

iii).Λύστε την εξίσωση: f(z) = i.

22). Δίνεται ο μιγαδικός z = x + y·i ,όπου x, y ∈ R. Αν η εικόνα του z ανήκει στην γραμμή $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 20$ τότε :

i). Να βρείτε τους μιγαδικούς Z που έχουν το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο.

ii).Την εξίσωση της γραμμής στην οποία κινείται η εικόνα του w ∈ C ,όταν w = 2·z + 4.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1). Αν ω = $\frac{z+2}{z-i} \in R$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Μ του z αν z $\in$ C, z $\neq$ i.

2). Να βρεθούν τα σημεία Μ(z) του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ο $\frac{i\cdot z^2}{z+1}$ είναι καθαρά φανταστικός και z $\neq -1$.

3). Να βρεθούν τα σημεία Μ(z) του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει: $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$.

4). i). Να αποδείξετε την ισοδυναμία $z+\bar{z}=2\cdot|z| \Leftrightarrow z\in R_+$.

ii). Αν για τους μιγαδικούς $z_1 = x_1 + y_1$ και $z_2 = z_2 + y_2$ ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ να αποδείξετε ότι: $z_1\cdot \bar{z}_2 \in R_+$.

5). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z αν οι εικόνες των μιγαδικών z, i, i·z βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

6). Αν $|z_1| = |z_2| = 1$ τότε ο αριθμός $\frac{z_1+z_2\;^{\nu}}{z_1^{\nu}+z_2^{\nu}}$ είναι πραγματικός.

7). Δίνεται η σχέση: (1 + 5·i)·p + 2·q = 3 + 7·i. Να βρείτε τα p και w όταν:

i). p και q είναι πραγματικοί αριθμοί.

ii). p και q είναι μιγαδικοί συζυγείς.

8). Έστω οι μιγαδικοί z, z + i·z και Α, Β οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

9). α). Να λύσετε στο C την εξίσωση: $z^2 - 2\cdot i\cdot \bar{z} = 0$ (Ε)

β). Αν Ο, Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των λύσεων της (Ε) στο μιγαδικό επίπεδο να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο (η μηδενική ρίζα αντιστοιχεί στο Ο).

10). Θεωρούμε τον μιγαδικό z και έστω Μ η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του Μ όταν

i). $z\cdot\bar{z}+i\cdot\; z-\bar{z}\; -3=0$ ii). $z+\bar{z}\;^{2} -4\cdot\; z-\bar{z}\;^{2} =64$

11). Για κάθε μιγαδικό z = x + i·y (z $\neq \frac{1}{2}$), θεωρούμε το μιγαδικό $w=\frac{z-1}{2\cdot z-1}$

i). Να βρείτε, σε συνάρτηση των x, y τους Re(w) και Im(w).

ii). Αν Μ(x, y) είναι η εικόνα του z, ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy, να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου όταν:

∗ Ο w είναι ένας αριθμός πραγματικός. ∗ Ο w είναι ένας φανταστικός αριθμός.

iii). Να αποδείξετε ότι: αν $|z| = 1$ τότε $|z-2| = |2\cdot z-1|$ και $|w| = 1$.

12). Έστω $z = x + i\cdot y$ ($x, y \in R$) και Μ η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο.

i). Να βρείτε το γεωμ. τόπο του Μ αν το μέτρο του μιγαδικού $\frac{z+\bar{z}^{2}}{2\cdot z}$ είναι ίσο με το μέτρο του z, ($z \in C^*$).

ii). Όμοια να βρείτε το γ.τ. του Μ αν ο $w = \frac{z+\bar{z}^{2}}{2\cdot z} + i\cdot\bar{z}$ είναι πραγματικός αριθμός ($z \in C^*$).

13). Έστω P η εικόνα του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$ και Q η εικόνα του μιγαδικού $z+\frac{1}{z}$.

Να δείξετε ότι αν P κινείται σε κύκλο με εξίσωση $|z| = 2$ τότε το Q κινείται σε έλλειψη της οποίας να γράψετε την εξίσωση.

14). Έστω α πραγματικός αριθμός με $\alpha \in (0, 1)$. Να προσδιορίσετε το σύνολο των εικόνων του μιγαδικού z αν ο μιγαδικός $w = \frac{z\cdot\ z-\alpha}{1-\alpha\cdot z} \in R,\ \left(z \neq \frac{1}{\alpha}\right)$.

15). i). Να αποδείξετε ότι για κάθε $z_1, z_2 \in C$, $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\cdot|z_1|^2 + 2\cdot|z_2|^2$.

ii). Αν z_1, z_2, z_3 είναι μιγαδικοί αριθμοί, με $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, τότε οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

16). Να προσδιορίσετε το σύνολο των εικόνων Μ των μιγαδικών z, όταν οι εικόνες των μιγαδικών 1, z και $1 + z^2$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

17). i). Αν $z_1 = 3 + 4\cdot i$, και $|z_2| = 13$ να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $|z_1 + z_2|$.

ii). Στην περίπτωση που το $|z_1 + z_2|$ έχει τη μεγαλύτερη τιμή και επιπλέον έχουμε τον αριθμό z_2 στο πρώτο τεταρτημόριο, να βρείτε το μιγαδικό z_2.

18). Αν για το μιγαδικό z ισχύουν: $|z + 1| = |2\cdot z - 1| = \sqrt{5}$, να βρεθεί το μέτρο του z και z^4.

19). Θεωρούμε την εξίσωση: $2\cdot z^2 - 2\cdot(1 - συν(2\cdot\alpha))\cdot z + 1 - συν(2\cdot\alpha) = 0$ (Ε)

i). Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, \pi/2)$ η εξίσωση (Ε) δεν έχει ρίζες πραγματικές.

ii). Να λύσετε την εξίσωση και να βρείτε τα μέτρα των αντίστοιχων ριζών. ($\alpha \in (0, \pi/2)$).

20). i). Να λύσετε στο C την εξίσωση: $z^2 - 2\cdot ημφ\cdot z + εφ^2φ = 0$ (Ε)

$-\pi/2 < φ < \pi/2$ στη συνέχεια να βρείτε το μέτρο των ριζών.

ii). Να λύσετε στο C την εξίσωση: $z^2 - 2\cdot ημφ\cdot i\cdot z^2 + εφ^2φ = 0$, $φ \in (0, \pi/2)$.

21). α). Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$, αν και μόνον αν $Re(z_1\cdot\bar{z}_2) = 0$.

β). Έστω μια συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to R$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha^2 + i\cdot f(\alpha)$, $w = f(\beta) + i\cdot\beta^2$ με $\alpha\cdot\beta \neq 0$. Αν $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. (Γεν. Εξετάσεις 1995)

22). Σημείο M(x, y) διαγράφει κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.
Να βρεθεί:
α). Η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού $z = (x + 3) + (y - 4)\cdot i$.
β). Ο μιγαδικός z με το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο αντιστοίχως.

23). α). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος (C_1) των εικόνων του z, όπου ο $z = x + y\cdot i$ ικανοποιεί τη σχέση $(\bar{z} + z)\cdot\left[\frac{1}{4}\cdot(z^2 + \bar{z}^2)\cdot i + \frac{i}{2}\cdot(|z|^2 + 4)\right] = z - \bar{z}$.
β). Αν ο αριθμός $\frac{3}{2}\cdot(z + \bar{z})^2 + i\cdot(z - \bar{z}) + 2\cdot i$ είναι φανταστικός, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος (C_2) των εικόνων του z.
γ). Αν f(x) είναι το διάγραμμα του C_1 και g(x) το διάγραμμα του C_2 να υπολογιστεί το $\int_0^2 |f(x) - g(x)|\cdot dx$.

24). Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = x + y\cdot i$ με $|z| = r$ όπου $0 < r < 2$ που οι εικόνες του ανήκουν στον κύκλο C.
α). Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων $ε_1$, $ε_2$ του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A(–2, 0).
β). Αν ω είναι η γωνία των εφαπτόμενων $ε_1$, $ε_2$ και η ακτίνα r του κύκλου μεταβάλλεται με ρυθμό dr = –0,5 cm/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω, τη χρονική στιγμή t_0 που η ακτίνα είναι r = 1 cm.