ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δύο μικρές μύγες Α και Β κινούνται πάνω στο μιγαδικό επίπεδο και είναι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντίστοιχα, ώστε να ισχύει συνεχώς $z_1 = \frac{4+3\cdot i}{5}\cdot z_2$. Να αποδειχθεί ότι:

α). Οι δύο μύγες Α και Β ισαπέχουν συνεχώς από την αρχή των αξόνων.

β). Αν η μύγα Α κινείται πάνω στον ορισμένο κύκλο (Κ, ρ), τότε και η μύγα Β κινείται πάνω σε έναν ορισμένο κύκλο, του οποίου να βρεθούν κέντρο και ακτίνα.

ΛΥΣΗ

α). Αρκεί να δείξουμε ότι : ΟΑ = ΟΒ, όπου ΟΑ = $|z_1|$ και ΟΒ = $|z_2|$.

Από την σχέση που ισχύει έχουμε: $z_1 = \frac{4+3\cdot i}{5}\cdot z_2 \Rightarrow |z_1| = \left|\frac{4+3\cdot i}{5}\right|\cdot|z_2| \Rightarrow |z_1| = \frac{|4+3\cdot i|}{|5|}\cdot|z_2|$

$\Rightarrow |z_1| = |z_2| \Rightarrow$ ΟΑ = ΟΒ. Επομένως τα σημεία Α, Β ισαπέχουν από το Ο.

β). Έστω Κ(α, β) η εικόνα του μιγαδικού z_κ.

Το σημείο Α κινείται στον κύκλο (Κ, ρ) άρα ικανοποιεί την μιγαδική εξίσωση $|z_1 - z_\kappa| = \rho$.

Από την οποία έχουμε : $|z_1 - z_\kappa| = \rho \Rightarrow \left|\frac{4+3\cdot i}{5}z_2 - \;\alpha + i\beta\;\right| = \rho \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{4+3\cdot i}{5}\left(z_2 - \frac{5}{4+3\cdot i}\cdot\;\alpha + i\beta\;\right)\right| = \rho \left|\frac{4+3\cdot i}{5}\right|\cdot\left|z_2 - \frac{5\cdot\;\alpha + i\beta}{4+3\cdot i}\right| = \rho \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_2 - z_\Lambda| = \rho$. Η εξίσωση δηλώνει ότι η εικόνα Β του μιγαδικού z_2 σε κύκλο με κέντρο τον μιγαδικό $z_\Lambda = \frac{5\cdot\;\alpha + i\beta}{4+3\cdot i}$ και ακτίνα ρ.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω η εξίσωση $\alpha\cdot x^2 + 2\cdot\beta\cdot x + \alpha = 0$, με $\alpha > \beta > 0$, που έχει ρίζες τις x_1, x_2.

α). Να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

[Α]. $x_1, x_2 \in R$ [Β]. $|x_1| \neq |x_2|$ [Γ]. Τίποτα από τα προηγούμενα

[Δ]. $x_1 + x_2 = -4\cdot x_1\cdot x_2$ [Ε]. $|x_1| = |x_2| = 1$

β). Αν ισχύει $|x_1 + x_2| = \frac{|x_1| + |x_2|}{2}$, τότε να βρεθούν :

(i). Οι ρίζες x_1 και x_2,

(ii).Οι θετικοί ακέραιοι ν για τους οποίους ισχύει $(x_1 - x_2)^\nu > 0$.

ΛΥΣΗ

α). Έχουμε $\Delta = (2\cdot\beta)^2 - 4\cdot\alpha\cdot\alpha = 4(\beta^2 - \alpha^2) < 0$, επειδή $\alpha > \beta$.

επομένως η εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες x_1, x_2 , επειδή $\alpha, \beta \in R$.

$S = x_1 + x_2 = -\frac{-2\beta}{\alpha}$ (το άθροισμα των ριζών δεν μπορεί να αξιοποιηθεί)

$P = x_1\cdot x_2 = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \Rightarrow x_1\cdot x_2 = 1 \Rightarrow x_1\cdot\overline{x_1} = 1 \Rightarrow |x_1|^2 = 1 \Rightarrow |x_1| = 1 = |x_2|$.

Επομένως σωστή επιλογή είναι η [Ε].

β). Ισχύει $\left|x_1 + x_2\right| = \dfrac{|x_1| + |x_2|}{2} \Rightarrow \left|-\dfrac{2\beta}{\alpha}\right| = \dfrac{1+1}{2} \Rightarrow 2\cdot\beta = \alpha$, επειδή $\alpha > \beta > 0$.

Άρα η εξίσωση γράφεται : $\alpha\cdot x^2 + \alpha\cdot x + \alpha = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{i\cdot\sqrt{3}}{2}$.

Επομένως έχουμε : $(x_1 - x_2)^{\nu} = \left(\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{\nu} = i\cdot\sqrt{3}^{\ \nu} = \sqrt{3}^{\nu}\cdot i^{\nu}$

Για να είναι $\sqrt{3}^{\nu}\cdot i^{\nu} > 0$, θα πρέπει $\nu = 4\cdot\kappa$, όπου $\kappa \in Z$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν η εξίσωση $z^2 + \alpha\cdot z + \beta = 0$, όπου $\alpha, \beta \in R$, έχει ρίζες του μιγαδικούς $z_1 = 3 + 2\cdot i$ και z_2, τότε:
α). Να βρείτε τους α, β και z_2.
β). Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ο μιγαδικός $w = z_1^{\nu} + z_2^{\nu}$ είναι πραγματικός.
γ). Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παράστασης $f(z) = |z - z_1| + |z - z_2|$, $z \in C$.

ΛΥΣΗ

α). Επειδή η εξίσωση έχει πραγματικούς συντελεστές και μια ρίζα μιγαδική την $z_1 = 3 + 2\cdot i$.
η δεύτερη ρίζα θα είναι $z_2 = \overline{z_1} = 3 - 2\cdot i$. ακόμα έχουμε :

$S = z_1 + z_2 = -\dfrac{\alpha}{1} \Rightarrow 6 = -\alpha \Rightarrow \alpha = -6$.

$P = z_1\cdot z_2 = \dfrac{\beta}{1} \Rightarrow 13 = \beta \Rightarrow \beta = 13$.

β). (α τρόπος): $\overline{w} = \overline{z_1^{\nu} + z_2^{\nu}} = \overline{z_1^{\nu}} + \overline{z_2^{\nu}} = \overline{z_1}^{\nu} + \overline{z_2}^{\nu} = z_2^{\nu} + z_1^{\nu} = w \Leftrightarrow \overline{w} = w \Leftrightarrow w \in R$.

(β τρόπος) : $w = z_1^{\nu} + z_2^{\nu} = z_1^{\nu} + \overline{z_1}^{\ \nu} = 2\cdot Re(z_1^{\nu}) \in R$.

γ). (α τρόπος) : $f(z) = |z - z_1| + |z - z_2| \geq \left|\, z - z_1 \; - \; z - z_2 \,\right| = |z_2 - z_1| = |-4\cdot i| = 4$.

(β τρόπος) : έστω Μ, M_1, M_2 οι εικόνες των μιγαδικών z, $z_1 = 3 + 2\cdot i$, $z_2 = 3 - 2\cdot i$.

$f(z) = |z - z_1| + |z - z_2| = MM_1 + MM_2$

Η συνάρτηση f(z) περιγράφει το άθροισμα των αποστάσεων του Μ από τα M_1, M_2 που είναι σταθερά (γνωστά σημεία), και προφανώς το άθροισμα αυτό ελαχιστοποιείται όταν το Μ βρίσκεται πάνω στο εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2, και ισούται με την απόσταση $M_1M_2 = 4$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω οι διαφορετικοί μιγαδικοί z_1και z_2 και ο φανταστικός αριθμός $w = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$, να αποδείξετε ότι:
α). Ο μιγαδικός w^{2008} είναι θετικός αριθμός ή μηδέν.
β). Οι μιγαδικοί z_1και z_2 έχουν ίσα μέτρα.

ΛΥΣΗ

α). $w \in I \Rightarrow w = \beta\cdot i$, όπου $\beta \in R$.
άρα $w^{2008} = (\beta\cdot i)^{2008} = \beta^{2008}\cdot i^{2008} = \beta^{2008} \geq 0$.

β). $w \in I \Rightarrow \overline{w} = w \Rightarrow \overline{\left(\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)} = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \Rightarrow \cdot\cdot$ πράξεις $\cdot\cdot\cdot \Rightarrow |z_1| = |z_2|$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Έστω f(z) = $\dfrac{3\cdot \mathrm{Re}(z)+4\cdot \mathrm{Im}(z)}{z}$, z ∈ C – {0} και z = x + i·y, x, y ∈ R.

α). Να βρείτε τον γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z ≠ 0 για τους οποίους ισχύει $|f(z)|=3$

β). Αν Re(z) =λ Im(z), τότε:

i). Να εκφράσετε το $|f(z)|$ ως συνάρτηση του λ.

ii). Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $|f(z)|$.

ΛΥΣΗ

f(z) = $\dfrac{3\cdot \mathrm{Re}(z)+4\cdot \mathrm{Im}(z)}{z}$ ⇒ f(z) = $\dfrac{3\cdot x+4\cdot y}{x+i\cdot y}$.

α). Ισχύει $|f(z)|=3 \Rightarrow \left|\dfrac{3\cdot x+4\cdot y}{x+i\cdot y}\right|=3 \Rightarrow \dfrac{|3\cdot x+4\cdot y|}{|x+i\cdot y|}=3 \Rightarrow |3\cdot x+4\cdot y|=3\cdot|x+i\cdot y| \Rightarrow$

$\Rightarrow |3\cdot x+4\cdot y|^2 = \left(3\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \Rightarrow 9\cdot x^2 + 24\cdot x\cdot y + 16\cdot y^2 = 9\cdot x^2 + 9\cdot y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 24\cdot x\cdot y + 16\cdot y^2 = 9\cdot y^2 \Rightarrow 24\cdot x\cdot y + 7\cdot y^2 = 0 \Rightarrow y\cdot(24\cdot x + 7\cdot y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} y=0 \\ 7y+24x=0 \end{matrix}\right\}.$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού βρίσκεται στον πραγματικό άξονα ή στην ευθεία 7·y + 24·x = 0

β). Re(z) =λ Im(z) ⇒ x = λ·y ⇒ λ = $\dfrac{x}{y}$

i). $|f(z)| = \left|\dfrac{3\cdot x+4\cdot y}{x+i\cdot y}\right| = \left|\dfrac{3\cdot\frac{x}{y}+4}{\frac{x}{y}+i}\right| = \left|\dfrac{3\cdot\lambda+4}{\lambda+i}\right| = \dfrac{|3\cdot\lambda+4|}{|\lambda+i|} = \dfrac{|3\cdot\lambda+4|}{\sqrt{\lambda^2+1}} \Rightarrow f(\lambda) = \dfrac{|3\cdot\lambda+4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$

ii). (α τρόπος) : θεωρώ $\vec{\alpha} = (\lambda,1)$, $\vec{\beta} = (3,4)$, και παρατηρώ ότι

$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\lambda^2+1}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 3\cdot\lambda+4$

Οπότε : f(λ) = $\dfrac{|3\cdot\lambda+4|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \dfrac{|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} = \dfrac{\left||\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right|}{|\vec{\alpha}|} = \dfrac{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right|}{|\vec{\alpha}|}$

Άρα f(λ) = $|\vec{\beta}|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right| = 5\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right| \le 5.$

Τελικά μέγιστη τιμή του f(z) είναι το 5.

(β τρόπος) : εργάζομαι με παραγώγους.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Έστω α, β, γ τρεις μιγαδικοί διάφοροι του μηδενός και διαφορετικοί ανά δύο. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1 = \dfrac{\alpha}{\beta-\gamma}$ $z_2 = \dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}$ και $z_3 = \dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}$. Να δειχθεί ότι : αν οι z_1, z_2 είναι φανταστικοί τότε και ο z_3 είναι φανταστικός. Στην περίπτωση αυτή, αν Α,Β,Γ είναι οι εικόνες των α, β, γ στο μιγαδικό επίπεδο, να δειχθεί ότι : η αρχή Ο των αξόνων είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

ΛΥΣΗ

Ισχύει : $z_1 \in I \Rightarrow \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta-\gamma}\right)} = -\dfrac{\alpha}{\beta-\gamma} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \overline{\gamma}\cdot\alpha = \alpha\cdot\overline{\beta} + \overline{\alpha}\cdot\beta - \gamma\cdot\overline{\alpha}$ (1)

Ισχύει : $z_2 \in I \Rightarrow \overline{\left(\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}\right)} = -\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \overline{\gamma}\cdot\beta = \beta\cdot\overline{\alpha} + \overline{\beta}\cdot\alpha - \beta\cdot\overline{\gamma}$ (2)

Θέλω να δείξω ότι : $\overline{z_3} = -z_3$ δηλαδή

$$\overline{z_3} = z_3 \Rightarrow \overline{\left(\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)} = -\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta} \Rightarrow \dfrac{\overline{\gamma}}{\overline{\alpha}-\overline{\beta}} = -\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta} \Rightarrow \overline{\gamma}\cdot\ \alpha-\beta\ = -\gamma\cdot\ \overline{\alpha}-\overline{\beta}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\gamma}\cdot\alpha - \overline{\gamma}\cdot\beta = -\gamma\cdot\overline{\alpha} + \gamma\cdot\overline{\beta} \Rightarrow\ \alpha\cdot\overline{\beta} + \overline{\alpha}\cdot\beta - \gamma\cdot\overline{\alpha}\ -\ \beta\cdot\overline{\alpha} + \overline{\beta}\cdot\alpha - \beta\cdot\overline{\gamma}\ = -\gamma\cdot\overline{\alpha} + \gamma\cdot\overline{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\cdot\overline{\beta} + \overline{\alpha}\cdot\beta - \gamma\cdot\overline{\alpha} - \beta\cdot\overline{\alpha} - \overline{\beta}\cdot\alpha + \beta\cdot\overline{\gamma} = -\gamma\cdot\overline{\alpha} + \gamma\cdot\overline{\beta} \Rightarrow -\gamma\cdot\overline{\alpha} + \beta\cdot\overline{\gamma} = -\gamma\cdot\overline{\alpha} + \gamma\cdot\overline{\beta}$$

Η οποία ισχύει άρα $z_3 \in I$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, με $|z_1| = |z_2| = 2$ και $z_1 \cdot z_2 \notin R$. Να βρεθεί ο $\lambda \in R$, ώστε ο μιγαδικός $w = \dfrac{z_1 + z_2}{\lambda + z_1 z_2}$ να είναι πραγματικός.

ΛΥΣΗ

Ισχύει $|z_1| = |z_2| = 2 \Rightarrow\ z_1 \cdot \overline{z_1} = 4,\ \ z_2 \cdot \overline{z_2} = 4$

Και $w \in R \Rightarrow \overline{w} = w \Rightarrow \overline{\left(\dfrac{z_1 + z_2}{\lambda + z_1 \cdot z_2}\right)} = \dfrac{z_1 + z_2}{\lambda + z_1 \cdot z_2} \Rightarrow \cdots \Rightarrow\ \lambda - 4\ \cdot\ z_1 - \overline{z_1} + z_2 - \overline{z_2}\ = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \lambda - 4\ \cdot \left[\ z_1 - \overline{z_1}\ +\ z_2 - \overline{z_2}\ \right] = 0 \Rightarrow \lambda = 4.$ επειδή $z_1 \cdot z_2 \notin R \Rightarrow\ \overline{z_1} \neq z_1\ \kappa\alpha\iota\ \overline{z_2} \neq z_2$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Έστω $x \in R$ και ο μιγαδικός $z = x + \dfrac{i}{x+i}$:

α). Να σημειώσετε στο γραπτό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

[Α]. $Im(z) > \dfrac{1}{2}$ [Β]. $Im(z) < -\dfrac{1}{2}$ [Γ]. $Im(z) \geq 0$ [Δ]. $Im(z) \leq \dfrac{1}{2}$

[Δ]. τίποτε από τα προηγούμενα

ΛΥΣΗ

$$z = x + \dfrac{i}{x+i} = x + \dfrac{i\cdot\ x-i}{x+i\ \cdot\ x-i} = x + \dfrac{1+i\cdot x}{x^2+1} = \left(x + \dfrac{1}{x^2+1}\right) + i\cdot\dfrac{x}{x^2+1}$$

άρα $\dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cdot x \leq x^2+1 \Leftrightarrow x^2 - 2\cdot x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ ισχύει. Επιλογή [Δ].

ΑΣΚΗΣΗ 9

Αν ισχύει Re(z) = Im(z), να βρείτε τον θετικό ακέραιο ν, ώστε $z^{\nu} = 2^{-9}\cdot i$.

ΛΥΣΗ

$z^{\nu} = 2^{-9}\cdot i \Rightarrow (x + i\cdot x)^{\nu} = 2^{-9}\cdot i \Rightarrow x^{\nu}\cdot[(1 + i)^2]^{\nu/2} = 2^{-9}\cdot i \Rightarrow x^{\nu}\cdot(2\cdot i)^{\nu/2} = 2^{-9}\cdot i \Rightarrow x^{\nu}\cdot 2^{\nu/2}\cdot i^{\nu/2} = 2^{-9}\cdot i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x^{\nu}\cdot 2^{\nu} = 2^{-9} \\ i^{\frac{\nu}{2}} = i \end{matrix}\right\} \Rightarrow i^{\frac{\nu}{2}} = i \Rightarrow \frac{\nu}{2} = 2\kappa + 1 \Rightarrow \nu = 4\cdot\kappa + 2,\ \kappa \in Z.$$

Πρέπει $\nu > 0 \Rightarrow 4\lambda+2 > 0 \Rightarrow \lambda > -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \nu = 6$.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει $z_1\cdot z_2 = 1 + i$. Υποθέτουμε ότι η εικόνα M_1 του μιγαδικού z_1 κινείται πάνω στον κύκλο κέντρου K(0, 1) και ακτίνας ρ = 1. α). Να δειχθεί ότι η εικόνα του z_2 κινείται πάνω σε μια ορισμένη γραμμή, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. β). Να βρείτε τον μιγαδικό z_2 με το μικρότερο μέτρο.

ΛΥΣΗ

α). Έστω $M(z_1)$ εικόνα του μιγαδικού αριθμού z_2, ικανοποιεί την μιγαδική εξίσωση $|z_1 - 1| = 1$.

Έχουμε : $|z_1 - 1| = 1 \Rightarrow \left|\dfrac{1+i}{z_2} - 1\right| = 1 \Rightarrow \left|\dfrac{1+i-z_2}{z_2}\right| = 1 \Rightarrow \dfrac{|1+i-z_2|}{|z_2|} = 1 \Rightarrow |1+i-z_2| = |z_2| \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|z_2 -\; 1+i\;\right| = |z_2|$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z_2 είναι τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α(0, 0) και Β(1, 1).

β). $\left|z_2 -\; 1+i\;\right| = |z_2| \Rightarrow \left|\; x-1\; + i\cdot\; y-1\;\right| = |x + i\cdot y| \Rightarrow \cdots \Rightarrow y = -x + \dfrac{1}{2}$. (μεσοκάθετη στην ΑΒ)

ο μιγαδικός z_2 που έχει το ελάχιστο μέτρο προκύπτει από την λύση του συστήματος

$$\left\{\begin{matrix} y = -x + \frac{1}{2} \\ y = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_{min} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot i.$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \dfrac{3\cdot\lambda + i}{1+\lambda\cdot i}$, $\lambda \in R$. α). Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση. Κάθε μιγαδικός z έχει μέτρο [Α]. Μεγαλύτερο του 3 [Β]. Μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του3 [Γ]. Μικρότερο ή ίσο του 1 [Δ]. Ίσο με 1 [Ε]. Ίσο με 3 β). Να δειχθεί ότι οι εικόνες όλων των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε κέντρο και ακτίνα. γ). Αν z_1 και z_2 είναι δύο τυχαίοι μιγαδικοί από τους παραπάνω, να δείξετε ότι : $|z_1 - z_2| \le 4$.

ΛΥΣΗ

α). $|z| = \left|\dfrac{3\lambda + i}{1+\lambda\cdot i}\right| = \dfrac{\sqrt{9\lambda^2+1}}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ και $1 \le \dfrac{\sqrt{9\lambda^2+1}}{\sqrt{1+\lambda^2}} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \dfrac{9\lambda^2+1}{1+\lambda^2} \le 9 \Leftrightarrow 1+\lambda^2 \le 9\lambda^2 + 1 \le 9\;\; 1+\lambda^2$

$\Leftrightarrow 1+\lambda^2 \le 9\lambda^2 + 1 \le 9 + \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 \le 9\lambda^2 \le 8 + \lambda^2$ ισχύει, άρα σωστή επιλογή είναι Β.

β). $z = \dfrac{3\cdot\lambda + i}{1+\lambda\cdot i} = \dfrac{(3\cdot\lambda+i)(1-\lambda\cdot i)}{(1+\lambda\cdot i)(1-\lambda\cdot i)} = \dfrac{3\cdot\lambda + i - 3\lambda^2 i + \lambda}{1^2+\lambda^2} = \dfrac{4\cdot\lambda}{1+\lambda^2} + \dfrac{1-3\lambda^2}{1+\lambda^2}\cdot i$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{4\cdot\lambda}{1+\lambda^2} \\ y &= \frac{1-3\lambda^2}{1+\lambda^2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x(1+\lambda^2) &= 4\cdot\lambda \\ y(1+\lambda^2) &= 1-3\lambda^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x(1+\lambda^2) &= 4\cdot\lambda \\ y(1+\lambda^2) + 3\lambda^2 + 3 &= 4\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} x(1+\lambda^2) &= 4\cdot\lambda \\ y(1+\lambda^2) + 3(\lambda^2+1) &= 4\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x(1+\lambda^2) &= 4\cdot\lambda \\ (y+3)(\lambda^2+1) &= 4\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y+3} = \lambda$$

Επομένως $x(1+\lambda^2) = 4\cdot\lambda \Rightarrow x\left(1+\left(\dfrac{x}{y+3}\right)^2\right) = 4\cdot\left(\dfrac{x}{y+3}\right) \Rightarrow x\left(1+\dfrac{x^2}{(y+3)^2}\right) = \dfrac{4\cdot x}{y+3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1+\frac{x^2}{(y+3)^2} = \frac{4}{y+3} \Rightarrow (y+3)^2 + x^2 = 4(y+3) \Rightarrow y^2+6y+9+x^2 = 4y+12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2+2y+1+x^2 = 4 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 4.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z βρίσκονται στην περιφέρεια κύκλου με κέντρο το Σημείο Κ(−1, 0) και ακτίνα ρ = 2.

γ). Έστω z_1 και z_2 είναι δύο τυχαίοι μιγαδικοί τον παραπάνω γεωμετρικό τόπο με εικόνες Α,Β. τότε η μέγιστη απόστασή τους θα είναι $AB \le 4 \Rightarrow |z_1 - z_2| \le 4$ (ΑΒ διάμετρος του κύκλου)

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να δειχτεί ότι για κάθε z_1 και $z_2 \in C$ ισχύουν:

α). $2\cdot\left[|z_1\cdot z_2| - \mathrm{Re}(z_1\cdot z_2)\right] - |z_1 - \overline{z_2}|^2 + (|z_2| - |z_1|)^2 = 0$ (1).

β). $\sqrt{2}\cdot|\mathrm{Im}(z_1)| = \sqrt{|z_1|^2 - \mathrm{Re}\, z_1^2}$.

ΛΥΣΗ

α). $2\cdot\left[|z_1\cdot z_2| - \mathrm{Re}(z_1\cdot z_2)\right] - |z_1 - \overline{z_2}|^2 + (|z_2| - |z_1|)^2 =$

$= 2\cdot|z_1\cdot z_2| - 2\cdot\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2) - (z_1 - \overline{z_2})\cdot(\overline{z_1} - z_2) + |z_2|^2 + |z_1|^2 - 2\cdot|z_1|\cdot|z_2| =$

$= 2\cdot|z_1|\cdot|z_2| - 2\cdot\dfrac{z_1\cdot z_2 + \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}{2} - (z_1 - \overline{z_2})\cdot(\overline{z_1} - z_2) + |z_2|^2 + |z_1|^2 - 2\cdot|z_1|\cdot|z_2| =$

$= 2\cdot|z_1|\cdot|z_2| - z_1\cdot z_2 - \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} - z_1\cdot\overline{z_1} + z_1\cdot z_2 + \overline{z_2}\cdot\overline{z_1} - \overline{z_2}\cdot\overline{z_2} + |z_2|^2 + |z_1|^2 - 2\cdot|z_1|\cdot|z_2| =$

$= 2\cdot|z_1|\cdot|z_2| - |z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 - 2\cdot|z_1|\cdot|z_2| = 0.$

β). $\sqrt{|z_1|^2 - \mathrm{Re}\, z_1^2} = \sqrt{x^2+y^2-(x^2-y^2)} = \sqrt{2y^2} = \sqrt{2}\cdot|y| = \sqrt{2}\cdot|\mathrm{Im}(z_1)|.$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Έστω $f(z) = \left(2+\frac{3}{2}\cdot i\right)\cdot z - \frac{5}{2}\cdot \bar{z}\cdot i$, όπου $z = x + y\cdot i$, $x, y \in R$.

α). Να βρεθούν τα $Re(f(z))$, $Im(f(z))$.

β). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(f(z))$ στο μιγαδικό επίπεδο.

γ). Να δειχτεί ότι $|f(z)| = |x-2\cdot y|\cdot\sqrt{5}$.

δ). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $z = x + i\cdot y$, για τους οποίους ισχύει $|f(z)| = \sqrt{5}$.

ΛΥΣΗ

α). Θέτω $z = x + i\cdot y$, όπου $x, y \in R$.

$$f(z) = \left(2+\frac{3}{2}\cdot i\right)\cdot z - \frac{5}{2}\cdot \bar{z}\cdot i = f(z) = \left(2+\frac{3}{2}\cdot i\right)\cdot(x + i\cdot y) - \frac{5}{2}\cdot(x - i\cdot y)\cdot i = \cdots$$

$$f(z) = (2\cdot x - 4\cdot y) + i\cdot(2\cdot y - 1) \Rightarrow Re(f(z)) = 2\cdot x - 4\cdot y \quad \text{και} \quad Im(f(z)) = 2\cdot y - 1.$$

β). Έστω $M(f(z)) = M(X, Y)$. τότε ισχύει :

$$\left\{\begin{matrix} X = 2x-4y \\ Y = 2y-x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} X = -(2y-x) \\ Y = 2y-x \end{matrix}\right\} \Rightarrow X = -2\cdot Y \Rightarrow Y = -\frac{1}{2}\cdot X \quad (\text{ευθεία})$$

γ). $$|f(z)| = \sqrt{(2x-4y)^2+(2y-x)^2} = \sqrt{(-2(2y-x))^2+(2y-x)^2} = \sqrt{4(2y-x)^2+(2y-x)^2} =$$
$$= \sqrt{5\cdot(2y-x)^2} = \sqrt{5}\cdot|2y-x|.$$

δ). $$|f(z)| = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5}\cdot|2y-x| = \sqrt{5} = |2y-x| = 1 \Rightarrow 2y-x = \pm 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\cdot x \pm \frac{1}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w και έστω Α, Β οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο.

α). Να δειχθεί ότι $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = Re(z\cdot\bar{w})$

β). Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 με εικόνες Α, Β, Γ, για τους οποίους ισχύει $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1\cdot(z_2^2 + z_3^2) + z_2\cdot(z_3^2 + z_1^2) + z_3\cdot(z_1^2 + z_2^2) = 0$. Να δειχθεί ότι :

(i). $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Gamma}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$

(ii). $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}\right| = \sqrt{3}$.

ΛΥΣΗ

α). Έστω Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα με $z = x + i\cdot y$, $w = \alpha + i\cdot\beta$.

έχουμε : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = (x, y)\cdot(\alpha,\beta) = x\cdot\alpha + y\cdot\beta \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = x\cdot\alpha + y\cdot\beta$ (1)

και $z\cdot\bar{w} = (x+i\cdot y)\cdot(\alpha - i\cdot\beta) = (x\cdot\alpha+y\cdot\beta)+i\cdot(\alpha\cdot y-\beta\cdot x) \Rightarrow Re(z\cdot\bar{w}) = x\cdot\alpha+y\cdot\beta$ (2)

από τις (1) και (2) έχουμε $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = Re(z\cdot\bar{w})$

β). i). χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α) έχουμε :

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Gamma}\cdot\overrightarrow{OA} = Re(z_1\cdot\bar{z_2}) + Re(z_2\cdot\bar{z_3}) + Re(z_3\cdot\bar{z_1}) =$$

$$= \frac{z_1\cdot\bar{z_2}+\bar{z_1}\cdot z_2}{2} + \frac{z_2\cdot\bar{z_3}+\bar{z_2}\cdot z_3}{2} + \frac{z_3\cdot\bar{z_1}+\bar{z_3}\cdot z_1}{2} = \qquad (\text{επειδή } |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \; z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 + z_2 \cdot \overline{z_3} + \overline{z_2} \cdot z_3 + z_3 \cdot \overline{z_1} + \overline{z_3} \cdot z_1 \; = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_1}{z_3} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right) + \left(\frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_2} \right) + \left(\frac{z_3}{z_1} + \frac{z_1}{z_3} \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2 \cdot z_1} + \frac{z_2^2 + z_3^2}{z_3 \cdot z_2} + \frac{z_3^2 + z_1^2}{z_1 \cdot z_3} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z_3 \cdot \; z_1^2 + z_2^2 \; + z_1 \cdot \; z_2^2 + z_3^2 \; + z_2 \cdot \; z_3^2 + z_1^2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_1} \right) = 0.$$

γ). $\left| \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} \right|^2 = \; \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} \; ^2 =$

$= \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{O\Gamma}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{O\Gamma} + 2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma} \cdot \overrightarrow{OA} =$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + 2 \cdot \; \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Gamma} \cdot \overrightarrow{OA} \; = 1 + 1 + 1 = 3$

Άρα $\left| \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} \right| = \sqrt{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 15

Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύουν ($z \cdot i + \bar{z} \cdot \sqrt{3}$) $\in$ R και $|z| = 1$.Να δειχθεί οτι

α). $z^{12} = 1$

β). $z^{288} - 2 \cdot z^{150} + 1 = 0$.

ΛΥΣΗ

$z \cdot i + \bar{z} \cdot \sqrt{3} \in R \Rightarrow \overline{z \cdot i + \bar{z} \cdot \sqrt{3}} = z \cdot i + \bar{z} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow -\bar{z} \cdot i + z \cdot \sqrt{3} = z \cdot i + \bar{z} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \; z - \bar{z} \; \cdot \sqrt{3} = \; z + \bar{z} \; \cdot i \Rightarrow 2 \cdot y \cdot i \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot x \cdot i \Rightarrow x = y \cdot \sqrt{3}$

Ακόμα $|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{\; y \cdot \sqrt{3} \; ^2 + y^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{4 \cdot y^2} = 1 \Rightarrow 2 \cdot |y| = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$

Άρα $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ και τελικά ο μιγαδικός $z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$z_1^2 = z_2^2 = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z_1^3 = z_1^2 \cdot z_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1 \Rightarrow z_1^3 = -1$.

α). Έχουμε : $z_1^{12} = (z_1^3)^4 = (-1)^4 = 1$.

β). $z^{288} - 2 \cdot z^{150} + 1 = (z^{12})^{24} - 2 \cdot (z^{12})^2 \cdot z^6 + 1 = (-1)^{24} - 2 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 16

Έστω z = 1 + i και w ένας μιγαδικός με $|w| = 2 \cdot |z|$.

α). Να βρείτε για ποιες τιμές του w η παράσταση $|z - w|$ γίνεται i) μέγιστη, ii) ελάχιστη.

β). Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα παραπάνω αποτελέσματα.

ΛΥΣΗ

α). $z = 1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$ και επειδή ισχύει $|w| = 2 \cdot |z| \Rightarrow |w| = 2 \cdot \sqrt{2}$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα έχουμε : $\big||z| - |w|\big| \le |z - w| \le |z| + |w| \Rightarrow$

$\Rightarrow \big||z| - 2 \cdot |z|\big| \le |z - w| \le |z| + 2|z| \Rightarrow |z| \le |z - w| \le 3|z| \Rightarrow \sqrt{2} \le |z - w| \le 3 \cdot \sqrt{2}$.

Επομένως i). η παράσταση $|z-w|$ έχει μέγιστο $3\cdot\sqrt{2}$

ii). η παράσταση $|z-w|$ έχει ελάχιστο $\sqrt{2}$

β). Αν Α , Β οι εικόνες των μιγαδικών z, w, τότε ΑΒ = $|z-w|$ θα

Η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w είναι $\sqrt{2} \le AB \le 3\cdot\sqrt{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύει :
(i). $z_1\cdot z_2 + z_3\cdot z_1 + z_2\cdot z_3 = 1$ και (ii). $|(z_1+z_2)\cdot(z_2+z_3)\cdot(z_3+z_1)| = 10$.
Να βρεθεί το: $|(1+z_1{}^2)\cdot(1+z_2{}^2)\cdot(1+z_3{}^2)|$

ΛΥΣΗ

Ισχύει : $|(z_1+z_2)\cdot(z_2+z_3)\cdot(z_3+z_1)| = 10 \Rightarrow |(z_1\cdot z_2 + z_2^2 + z_1\cdot z_3 + z_3\cdot z_2)\cdot(z_3+z_1)| = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left| \quad z_1\cdot z_2 + z_1\cdot z_3 + z_3\cdot z_2 \quad + z_2^2 \quad \cdot(z_3+z_1)\right| = 10 \Rightarrow \left| \quad 1+z_2^2 \quad \cdot(z_3+z_1)\right| = 10 \Rightarrow |1+z_2^2|\cdot|z_3+z_1| = 10$

Εργαζόμενοι ανάλογα έχουμε : τις σχέσεις : $\left\{\begin{array}{l} |1+z_2^2|\cdot|z_3+z_1| = 10 \\ |1+z_3^2|\cdot|z_1+z_2| = 10 \\ |1+z_1^2|\cdot|z_2+z_3| = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |1+z_2^2| = \dfrac{10}{|z_3+z_1|} \\ |1+z_3^2| = \dfrac{10}{|z_1+z_2|} \\ |1+z_1^2| = \dfrac{10}{|z_2+z_3|} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1+z_2^2|\cdot|1+z_3^2|\cdot|1+z_1^2| = \dfrac{10}{|z_3+z_1|}\cdot\dfrac{10}{|z_1+z_2|}\cdot\dfrac{10}{|z_2+z_3|} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1+z_2^2|\cdot|1+z_3^2|\cdot|1+z_1^2| = \dfrac{10\cdot10\cdot10}{|z_3+z_1|\cdot|z_1+z_2|\cdot|z_2+z_3|} \Rightarrow |1+z_2^2|\cdot|1+z_3^2|\cdot|1+z_1^2| = \dfrac{10\cdot10\cdot10}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1+z_2^2|\cdot|1+z_3^2|\cdot|1+z_1^2| = 100$.

ΑΣΚΗΣΗ 18

Έστω ο θετικός αριθμός ρ και οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:
(i). $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho$ (ii). $|z_1+z_2+z_3| = \rho^2$ (iii). $z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 = 0$
Να δειχθεί ότι $|z_1\cdot z_2 + z_3\cdot z_1 + z_2\cdot z_3| = 8$.

ΛΥΣΗ

Από $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho \Rightarrow z_1\cdot\overline{z_1} = z_2\cdot\overline{z_2} = z_3\cdot\overline{z_3} = \rho^2 \Rightarrow \overline{z_1} = \dfrac{\rho^2}{z_1},\ \overline{z_2} = \dfrac{\rho^2}{z_2},\ \overline{z_3} = \dfrac{\rho^2}{z_3}$

$|z_1+z_2+z_3| = \rho^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_1+z_2+z_3|^2 = \rho^4 \Rightarrow \quad z_1+z_2+z_3 \quad \overline{z_1+z_2+z_3} \quad = \rho^4 \Rightarrow \quad z_1+z_2+z_3 \quad \overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3} \quad = \rho^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1\cdot\overline{z_1} + z_1\cdot\overline{z_2} + z_1\cdot\overline{z_3} + z_2\cdot\overline{z_1} + z_2\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_3} + z_3\cdot\overline{z_1} + z_3\cdot\overline{z_2} + z_3\cdot\overline{z_3} = \rho^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + z_1\cdot\overline{z_2} + z_1\cdot\overline{z_3} + z_2\cdot\overline{z_1} + z_2\cdot\overline{z_3} + z_3\cdot\overline{z_1} + z_3\cdot\overline{z_2} = \rho^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + z_1\cdot\dfrac{\rho^2}{z_2} + z_1\cdot\dfrac{\rho^2}{z_3} + z_2\cdot\dfrac{\rho^2}{z_1} + z_2\cdot\dfrac{\rho^2}{z_3} + z_3\cdot\dfrac{\rho^2}{z_1} + z_3\cdot\dfrac{\rho^2}{z_2} = \rho^4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho^2+\rho^2+\rho^2+\rho^2\cdot\frac{z_1}{z_2}+\rho^2\cdot\frac{z_1}{z_3}+\rho^2\cdot\frac{z_2}{z_1}+\rho^2\cdot\frac{z_2}{z_3}+\rho^2\cdot\frac{z_3}{z_1}+\rho^2\cdot\frac{z_3}{z_2}=\rho^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\rho^2+\rho^2\cdot\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}\right)=\rho^4 \Rightarrow \rho^2\cdot\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}\right)=\rho^4-3\rho^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}=\rho^2-3 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_2}=\rho^2-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z_1^2+z_2^2}{z_1\cdot z_2}+\frac{z_1^2+z_3^2}{z_3\cdot z_1}+\frac{z_2^2+z_3^2}{z_2\cdot z_3}=\rho^2-3\Rightarrow \frac{-z_3^2}{z_1\cdot z_2}+\frac{-z_2^2}{z_3\cdot z_1}+\frac{-z_1^2}{z_2\cdot z_3}=\rho^2-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-z_3^3}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}+\frac{-z_2^3}{z_3\cdot z_2\cdot z_1}+\frac{-z_1^3}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}=\rho^2-3 \Rightarrow \frac{-z_1^3-z_2^3-z_3^3}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}=\rho^2-3\Rightarrow -\frac{z_1^3+z_2^3+z_3^3}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}=\rho^2-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3\cdot z_1\cdot z_2\cdot z_3}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}-\frac{z_1+z_2+z_3 \quad z_1^2+z_2^2+z_2^2-z_1\cdot z_2-z_2\cdot z_3-z_3\cdot z_1}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}=\rho^2-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3-\frac{z_1+z_2+z_3 \quad 0-z_1\cdot z_2-z_2\cdot z_3-z_3\cdot z_1}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}=\rho^2-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z_1+z_2+z_3 \quad z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}=\rho^2 \Rightarrow \frac{|z_1+z_2+z_3|\cdot|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|}{|z_1\cdot z_2\cdot z_3|}=\rho^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho^2\cdot|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|}{\rho^3}=\rho^2 \Rightarrow |z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|=\rho^3 \quad (1)$$

Ακόμα ισχύει : $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0 \Rightarrow \; z_1+z_2+z_3\;^2-2\cdot\; z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1\;=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \; z_1+z_2+z_3\;^2=2\cdot\; z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1 \; \Rightarrow |z_1+z_2+z_3|^2=2\cdot|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|=\rho^4 \Rightarrow |z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|=\frac{\rho^4}{2}. \quad (2)$$

Επομένως ισχύει από τις (1) και (2) : $\frac{\rho^4}{2}=\rho^3 \Rightarrow \rho^4=2\cdot\rho^3 \Rightarrow \rho^3\cdot\;\rho-2\;=0\Rightarrow \rho=2$.

Και τελικά $|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|=8$.

ΑΣΚΗΣΗ 19

Έστω ο ακέραιος $\nu > 3$ και οι πραγματικοί α, β με $\alpha^2+\beta^2=1$. Θεωρούμε την εξίσωση :

$\left(\frac{2\cdot z+1}{z-1}\right)^\nu = \alpha+\beta\cdot i$. Να δειχθεί ότι :

α). Όλες οι ρίζες της εξίσωσης έχουν εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο σημεία ομοκυκλικά.

β). Αν z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης, τότε θα ισχύει η σχέση $|z_1-z_2| \le 2$.

γ). Αν ο z_0, είναι ρίζα της εξίσωσης με $|z_0| = 2$, να δειχθεί ότι : $z_0 = -2$ και να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in R$.

ΛΥΣΗ

α). $\left(\frac{2\cdot z+1}{z-1}\right)^\nu=\alpha+i\cdot\beta \Rightarrow \left|\left(\frac{2\cdot z+1}{z-1}\right)^\nu\right|=|\alpha+i\cdot\beta| \Rightarrow \left|\frac{2\cdot z+1}{z-1}\right|^\nu=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \Rightarrow \left|\frac{2\cdot z+1}{z-1}\right|^\nu=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\frac{2\cdot z+1}{z-1}\right|=1 \Rightarrow \frac{|2\cdot z+1|}{|z-1|}=1 \Rightarrow |2\cdot z+1|=|z-1| \Rightarrow\cdots\Rightarrow (x+1)^2+y^2=1.$$

Οι τιμές του z που επαληθεύουν την εξίσωση είναι σημεία του κύκλου με κέντρο το K(−1, 0) και ακτίνα ρ = 1.

β). Αν Α, Β εικόνες των ριζών z_1, z_2 της εξίσωσης, έχουμε ότι ΑΒ = $|z_1 - z_2| \le 2$ (διάμετρος)

γ). το μόνο σημείο του κύκλου που έχει μέτρο 2 είναι η $z_0 = -2 + 0\cdot i$.

ΑΣΚΗΣΗ 20

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, $z_3 \in C^*$, ώστε να ισχύουν: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho$ και $\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) \in R$. Να δειχθεί ότι τουλάχιστον δυο από τους z_1, z_2, z_3 είναι ίσοι.

ΛΥΣΗ

Ισχύει $\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) \in R \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right)} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} \Rightarrow \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_3}} + \frac{\overline{z_3}}{\overline{z_1}} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} \Rightarrow$

Επειδή : $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho \Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} = z_3 \cdot \overline{z_3} = \rho^2$ έχουμε :

$$\Rightarrow \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} \Rightarrow \left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{z_1}{z_2}\right) + \left(\frac{z_3}{z_2} - \frac{z_2}{z_3}\right) + \left(\frac{z_1}{z_3} - \frac{z_3}{z_1}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{z_1}{z_2}\right) + \left(\frac{z_3}{z_2} - \frac{z_2}{z_3}\right) + \left(\frac{z_1}{z_3} - \frac{z_3}{z_1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{z_2^2 - z_1^2}{z_1 \cdot z_2} + \frac{z_3^2 - z_2^2}{z_2 \cdot z_3} + \frac{z_1^2 - z_3^2}{z_3 \cdot z_1} = 0 \Rightarrow$$

Επειδή z_1, z_2, $z_3 \neq 0$ έχουμε :

$\Rightarrow z_3 \cdot\ z_2^2 - z_1^2\ + z_1 \cdot\ z_3^2 - z_2^2\ + z_2 \cdot\ z_1^2 - z_3^2\ = 0$ ισχύει.

Έστω ότι $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$, τότε επειδή z_1, z_2, $z_3 \neq 0$

Θα πρέπει : $z_3 \cdot\ z_2^2 - z_1^2\ + z_1 \cdot\ z_3^2 - z_2^2\ + z_2 \cdot\ z_1^2 - z_3^2\ \neq 0$, άτοπο.

Άρα τουλάχιστον δύο από τους z_1, z_2, z_3 είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΗ 21

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, $z_3 \in C$, με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Να δείξετε ότι

$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z_3}{z_2}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z_3}{z_1}\right) \ge -\frac{3}{2}$. (Υπόδειξη : Παρατηρείστε ότι $|z_1 + z_2 + z_3|^2 \ge 0$)

ΛΥΣΗ

$$|z_1 + z_2 + z_3|^2 \ge 0 \Rightarrow\ z_1 + z_2 + z_3\ \ \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\ \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_1 \cdot \overline{z_3} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_3} + z_3 \cdot \overline{z_1} + z_3 \cdot \overline{z_2} + z_3 \cdot \overline{z_3} \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z_1|^2 + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_1 \cdot \overline{z_3} + z_2 \cdot \overline{z_1} + |z_2|^2 + z_2 \cdot \overline{z_3} + z_3 \cdot \overline{z_1} + z_3 \cdot \overline{z_2} + |z_3|^2 \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + 1 + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \ge 0 \Rightarrow 3 + \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right) + \left(\frac{z_1}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) + \left(\frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_2}\right) \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right) + \left(\frac{z_1}{z_3} + \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_3}}\right) + \left(\frac{z_2}{z_3} + \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_3}}\right) \ge -3 \Rightarrow 2 \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{z_1}{z_3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{z_2}{z_3}\right) \ge -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \left(\frac{z_1}{z_3}\right) + \left(\frac{z_2}{z_3}\right) \ge -\frac{3}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 22

Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο και ισχύει:
$z_3 = \frac{1}{2}\cdot i\cdot z_1 + (1 - \frac{1}{2}\cdot i)\cdot z_2$, να δειχθεί ότι : το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

ΛΥΣΗ

Από την σχέση $z_3 = \frac{1}{2}\cdot i\cdot z_1 + (1 - \frac{1}{2}\cdot i)\cdot z_2 \Rightarrow z_3 = \frac{1}{2}\cdot i\cdot z_1 + z_2 - \frac{1}{2}\cdot i\cdot z_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_3 - z_2 = \frac{1}{2}\cdot i\cdot z_1 - \frac{1}{2}\cdot i\cdot z_2 \Rightarrow z_3 - z_2 = \frac{1}{2}\cdot i\cdot(z_1 - z_2) \Rightarrow |z_3 - z_2| = |\frac{1}{2}\cdot i|\cdot|z_1 - z_2| \Rightarrow$

$\Rightarrow ΒΓ = \frac{1}{2}\cdot ΑΒ \Rightarrow ΑΒ = 2\cdot ΒΓ.$

Ακόμα με βάση την ισχύουσα σχέση η διαφορά $z_3 - z_1$ γράφεται:

$z_3 - z_1 = \frac{1}{2}\cdot i\cdot z_1 - z_1 + z_2 - \frac{1}{2}\cdot i\cdot z_2 \Rightarrow z_3 - z_1 = (\frac{1}{2}\cdot i - 1)z_1 - (\frac{1}{2}\cdot i - 1)\cdot z_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_3 - z_1 = (\frac{1}{2}\cdot i - 1)\cdot(z_1 - z_2) \Rightarrow |z_3 - z_1| = |\frac{1}{2}\cdot i - 1|\cdot|z_1 - z_2| \Rightarrow ΑΓ = \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot ΑΒ$

Επομένως $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + \left(\frac{1}{2}ΑΒ\right)^2 = \frac{4}{4}ΑΒ^2 + \frac{1}{4}ΑΒ^2 = \frac{5}{4}ΑΒ^2 = ΑΓ^2$ (πυθαγόρειο)

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την Β.

ΑΣΚΗΣΗ 23

Αν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ να δειχθεί ότι $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.
Εφαρμογή:
Με τη βοήθεια της παραπάνω πρότασης να δείξετε ότι το τρίγωνο που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2και z_3, για τους οποίους ισχύει: $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1\cdot z_2 + z_2\cdot z_3 + z_3\cdot z_1$ είναι ισόπλευρο.
Υπόδειξη : Να θέσετε $w_1 = z_2 - z_1$ κ.λ.π. και να δείξετε ότι $|w_1| = |w_2| = |w_3|$.

ΛΥΣΗ

$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 = - z_3 \Rightarrow (z_1 + z_2)^2 = (- z_3)^2 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2\cdot z_1\cdot z_2 = z_3^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow - z_3^2 + 2\cdot z_1\cdot z_2 = z_3^2 \Rightarrow 2\cdot z_1\cdot z_2 = 2\cdot z_3^2 \Rightarrow z_1\cdot z_2 = z_3^2.$ (1)
Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται $z_1\cdot z_3 = z_2^2$ και $z_2\cdot z_3 = z_1^2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε : $\left\{\begin{matrix} z_1^2 = z_2\cdot z_3 \\ z_2^2 = z_1\cdot z_3 \\ z_3^2 = z_1\cdot z_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} z_1^3 = z_1\cdot z_2\cdot z_3 \\ z_2^3 = z_1\cdot z_2\cdot z_3 \\ z_3^3 = z_1\cdot z_2\cdot z_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_1^3 = z_2^3 = z_3^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_1^3| = |z_2^3| = |z_3^3| \Rightarrow |z_1| = |z_2| = |z_3|$.

Εφαρμογή
Θέτουμε $w_1 = z_1 - z_2$, $w_2 = z_2 - z_3$, $w_3 = z_3 - z_1$.
Θέλω να αποδείξω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ, όπου Α, Β, Γ οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο ότι είναι ισοσκελές δηλαδή ότι ισχύει : $ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| \Rightarrow$
$\Rightarrow |w_1| = |w_2| = |w_3|$.
Ισχύει : $w_1 + w_2 + w_3 = z_1 - z_2 + z_2 - z_3 + z_3 - z_1 = 0$ (1)
Και από την ισχύουσα σχέση $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1\cdot z_2 + z_2\cdot z_3 + z_3\cdot z_1$ έχουμε
$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1\cdot z_2 + z_2\cdot z_3 + z_3\cdot z_1 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1\cdot z_2 - z_2\cdot z_3 - z_3\cdot z_1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cdot z_1^2 + 2\cdot z_2^2 + 2\cdot z_3^2 - 2\cdot z_1\cdot z_2 - 2\cdot z_2\cdot z_3 - 2\cdot z_3\cdot z_1 = 0 \Rightarrow (z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0$

$\Rightarrow w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 0 \quad (2)$

Επομένως από τις σχέσεις (1) και (2) που δείξαμε ότι ισχύουν έχουμε :

$$\left.\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 0 \\ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow |w_1| = |w_2| = |w_3| \Rightarrow |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| \Rightarrow AB = B\Gamma = \Gamma A$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

ΑΣΚΗΣΗ 24

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 και w ισχύει $z_1 + z_2 w + z_3 w^2 = 0$ και $|w|$=1, να δείξετε ότι :

α). $\overline{z_3} + \overline{z_2} \cdot w + \overline{z_1} \cdot w^2 = 0$.

β). $\left||z_1|^2 - |z_3|^2\right| = |\, z_2 \cdot \overline{z_3} - z_1 \cdot \overline{z_2} \,|$

ΛΥΣΗ

α). ισχύει $z_1 + z_2 w + z_3 w^2 = 0 \Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} \cdot \overline{w} + \overline{z_3} \cdot \overline{w^2} = 0 \Rightarrow \overline{z_1} + \dfrac{\overline{z_2}}{w} + \dfrac{\overline{z_3}}{w^2} = 0 \Rightarrow \overline{z_1} w^2 + \overline{z_2} \cdot w + \overline{z_3} = 0$

β). $z_1 + z_2 w + z_3 w^2 = 0 \Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot w + z_3 \cdot \overline{z_1} \cdot w^2 = 0 \Rightarrow |z_1|^2 = -z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot w - z_3 \cdot \overline{z_1} \cdot w^2 \quad (1)$

$\overline{z_1} w^2 + \overline{z_2} \cdot w + \overline{z_3} = 0 \Rightarrow \overline{z_1} \cdot w^2 \cdot z_3 + \overline{z_2} \cdot z_3 \cdot w + \overline{z_3} \cdot z_3 = 0 \Rightarrow |z_3|^2 = -\overline{z_1} \cdot w^2 \cdot z_3 - \overline{z_2} \cdot z_3 \cdot w \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχω:

$$\left||z_1|^2 - |z_3|^2\right| = \left|-z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot w - z_3 \cdot \overline{z_1} \cdot w^2 + \overline{z_1} \cdot w^2 \cdot z_3 + \overline{z_2} \cdot z_3 \cdot w\right| = \left|-z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot w + \overline{z_2} \cdot z_3 \cdot w\right| =$$

$$= \left|\left(\overline{z_2} \cdot z_3 - z_2 \cdot \overline{z_1}\right) \cdot w\right| = \left|\overline{z_2} \cdot z_3 - z_2 \cdot \overline{z_1}\right| \cdot |w| = \left|\overline{z_3} \cdot z_2 - z_1 \cdot \overline{z_2}\right|.$$

ΑΣΚΗΣΗ 25

Αν z_1 και z_2 είναι δύο τυχαίοι μιγαδικοί με μέτρο το 1, τότε :

α). Να αποδείξετε ότι $z_1 + z_2 + z_1 \cdot z_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 - z_1 \cdot z_2 + 1 = 0$.

β). Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $\dfrac{z_1 \cdot z_2 + z_1 + z_2 - 1}{z_1 + z_2 - z_1 \cdot z_2 + 1}$

ΛΥΣΗ

α). $z_1 + z_2 + z_1 \cdot z_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_1} \cdot \dfrac{1}{z_2} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1 + z_2 - z_1 \cdot z_2 + 1 = 0$

β). $\left|\dfrac{z_1 \cdot z_2 + z_1 + z_2 - 1}{z_1 + z_2 - z_1 \cdot z_2 + 1}\right| = \dfrac{|z_1 \cdot z_2 + z_1 + z_2 - 1|}{|z_1 + z_2 - z_1 \cdot z_2 + 1|} = \left|\dfrac{z_1 \cdot z_2 + z_1 + z_2 - 1}{\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} - 1}\right| = \left|\dfrac{z_1 \cdot z_2 + z_1 + z_2 - 1}{z_1 \cdot z_2 + z_1 + z_2 - 1}\right| = 1.$

ΑΣΚΗΣΗ 26

Αν $|z+w| = |z| = |w| \neq 0$, να δειχθεί ότι :

α). $\left(\dfrac{z}{w}\right)^2 + \dfrac{z}{w} + 1 = 0$ β). $\left|\dfrac{z}{w} - 1\right| = \sqrt{3}$

ΛΥΣΗ

α). $|z| = |w| \Rightarrow |z|^2 = |w|^2 \Rightarrow z\cdot\overline{z} = w\cdot\overline{w} \Rightarrow \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}} = \dfrac{w}{z}$ (1)

$|z+w| = |z| \Rightarrow |z+w|^2 = |z|^2 \Rightarrow z+w \cdot \overline{z}+\overline{w} = z\cdot\overline{z} \Rightarrow w\cdot\overline{z} + z\cdot\overline{w} + w\cdot\overline{w} = 0$ (2)

$|z+w| = |w| \Rightarrow |z+w|^2 = |w|^2 \Rightarrow z+w \cdot \overline{z}+\overline{w} = w\cdot\overline{w} \Rightarrow w\cdot\overline{z} + z\cdot\overline{w} + z\cdot\overline{z} = 0$ (3)

$(3) \Rightarrow w\cdot\overline{z} + z\cdot\overline{w} + z\cdot\overline{z} = 0 \Rightarrow w\cdot\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}} + z + z\cdot\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}} = 0 \Rightarrow w\cdot\dfrac{w}{z} + z + z\cdot\dfrac{w}{z} = 0 \Rightarrow \dfrac{w^2}{z} + z + w = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{w^2}{z^2} + 1 + \dfrac{w}{z} = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{w}{z}\right)^2 + \dfrac{w}{z} + 1 = 0$.

β). $\left(\dfrac{w}{z}\right)^2 + \dfrac{w}{z} + 1 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \dfrac{w}{z} = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, επομένως έχουμε

$\left|\dfrac{w}{z} - 1\right| = \left|-\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\dfrac{3}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{\dfrac{13}{4}} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 27

Έστω $\Pi(x) = x^2 + 2\cdot|z_1 - z_2|\cdot x + (1 + |z_1|^2)\cdot(1 + |z_2|^2)$, όπου $z_1, z_2 \in C$.

α). Να δειχθεί ότι : $\Pi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$.

β). Να βρείτε πότε μπορεί να ισχύει $\Pi(x) = 0$.

ΛΥΣΗ

α). Αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta \leq 0$, δηλαδή το τριώνυμο ομόσημο του $\alpha = 1 > 0$.

$\Delta = 4\cdot|z_1 - z_2|^2 - 4\cdot 1\cdot 1+|z_1|^2 \; 1+|z_2|^2 = 4\cdot z_1 - z_2 \; \overline{z_1} - \overline{z_2} - 4 \; 1+|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2\cdot|z_2|^2 =$

$= 4\cdot\left[z_1\cdot\overline{z_1} - z_1\cdot\overline{z_2} - z_2\cdot\overline{z_1} + z_2\cdot\overline{z_2} - 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 - |z_1|^2\cdot|z_2|^2\right] =$

$= 4\cdot\left[-z_1\cdot\overline{z_2} - z_2\cdot\overline{z_1} - 1 - z_1\cdot\overline{z_1}\cdot z_2\cdot\overline{z_2}\right] = -4\cdot\left[z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_1} + 1 + z_1\cdot\overline{z_1}\cdot z_2\cdot\overline{z_2}\right] =$

$= -4\cdot\left[\; z_1\cdot\overline{z_2} + 1 \; + z_2\cdot\overline{z_1}\cdot \; z_1\cdot\overline{z_2} + 1 \;\right] = -4\cdot \; z_1\cdot\overline{z_2} + 1 \; \cdot \; 1 + z_2\cdot\overline{z_1} \; =$

$= -4\cdot \overline{1 + z_2\cdot\overline{z_1}} \cdot 1 + z_2\cdot\overline{z_1} = -4\cdot\left|1 + z_2\cdot\overline{z_1}\right|^2 \leq 0$. ισχύει

Επομένως $\Pi(x) \geq 0$.

β). $\Pi(x) = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 1 + z_2\cdot\overline{z_1} = 0 \Rightarrow z_2\cdot\overline{z_1} = -1 \Rightarrow z_1\cdot\overline{z_2} = -1 \ldots \Rightarrow x = -|z_1 - z_2|$

ΑΣΚΗΣΗ 28

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1και z_2 οι οποίοι είναι τέτοιοι ώστε: ο αριθμός $\dfrac{1+i\cdot z_1}{z_1+i}$ να είναι πραγματικός και $|1+i\cdot z_2| = 2\cdot|z_2+i|$

α). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο (c_1) της εικόνας του z_1

β). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο (c_2) της εικόνας του z_2

γ). Να προσδιορίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των εικόνων z_1 και z_2.

ΛΥΣΗ

α). $\dfrac{1+i\cdot z_1}{z_1+i} \in R \Rightarrow \overline{\left(\dfrac{1+i\cdot z_1}{z_1+i}\right)} = \dfrac{1+i\cdot z_1}{z_1+i} \Rightarrow \cdots \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow |z - i| = 1$.

Η εικόνα του μιγαδικού z_2 βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο K(0, 1) και ακτίνα ρ = 1.

β). $|1+i\cdot z_2| = 2\cdot|z_2+i| \Rightarrow\ 1+i\cdot z_2\ \cdot\ 1-i\cdot\overline{z_2}\ = 2\cdot\ z_2+i\ \cdot\ \overline{z_2}-i\ \Rightarrow \cdots \Rightarrow x^2 + (y+3)^2 = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow |z + 3| = 2\cdot\sqrt{2}$

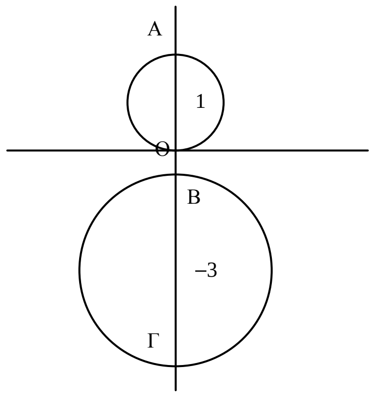
Η εικόνα του μιγαδικού z_2 βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο K(−3, 0) και ακτίνα ρ = $2\cdot\sqrt{2}$.

Η απόσταση ΟΒ = 3 – $2\cdot\sqrt{2}$.

Επομένως η ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z_1 , z_2 τότε : ΟΒ = $|z_1 - z_2| = 3 - 2\cdot\sqrt{2}$.

Η απόσταση ΑΓ = ΓΒ + ΒΟ + ΟΑ = $4\cdot\sqrt{2} + 3 - 2\cdot\sqrt{2} + 2$.

Επομένως η μέγιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z_1 , z_2 τότε : ΟΒ = $|z_1 - z_2| = 5 + 2\cdot\sqrt{2}$.



ΑΣΚΗΣΗ 29

Υπολογίστε στο σύνολο C τις λύσεις z_1 και z_2 της εξίσωσης $z^2 - 4\cdot z + 29 = 0$ και τις λύσεις z_3 , z_4 της εξίσωσης $z^2 + 4\cdot z + 13 = 0$.

α). Έστω z_1 , z_3 οι λύσεις που έχουν θετικό φανταστικό μέρος. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4, Ι που είναι εικόνες των αριθμών z_1, z_2, z_3 , z_4, 2.

β). Υπολογίστε το $|z_3 - 2|$. Δείξτε ότι τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

ΛΥΣΗ

α). Η εξίσωση $z^2 - 4\cdot z + 29 = 0$, έχει Δ = – 100 < 0, και λύσεις $z_{1,3} = 2 \pm 5\cdot i$.

Η εξίσωση $z^2 - 4\cdot z + 13 = 0$, έχει Δ = – 36 < 0, και λύσεις $z_{2,4} = -2 \pm 3\cdot i$.

β). $|z_3 - 2| = |2 \pm 5\cdot i - 2| = |\pm 5\cdot i| = 5$.

Παρατηρώ επίσης : $|z_1 - 2| = |z_2 - 2| = |z_3 - z_1| = |z_4 - 2| = 5$.

Δηλαδή όλες οι εικόνες των τεσσάρων ριζών ισαπέχουν από το 2.

Άρα οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3, z_4 βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο K(0, 2) και ακτίνα ρ = 5.

Να γίνει σχήμα

ΑΣΚΗΣΗ 30

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης :
$(-2+i)^{20}\cdot(z-2000)^{2004}-(\sqrt{3}+i\cdot\sqrt{2})^{20}\cdot(z-2004-2\cdot i)^{2004}=0$, ανήκουν σε ευθεία και να προσδιορίσετε την εξίσωση. Γιατί αυτή η ευθεία είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΑΒ με Α(2000, 0) και Β(2004, 2); Και ποιος είναι ο τύπος της ευθείας αυτής;

ΛΥΣΗ

$(-2+i)^{20}\cdot(z-2000)^{2004}-(\sqrt{3}+i\cdot\sqrt{2})^{20}\cdot(z-2004-2\cdot i)^{2004}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2+i)^{20}\cdot(z-2000)^{2004}=(\sqrt{3}+i\cdot\sqrt{2})^{20}\cdot(z-2004-2\cdot i)^{2004} \Rightarrow$

$\Rightarrow |(-2+i)^{20}|\cdot|(z-2000)^{2004}|=|(\sqrt{3}+i\cdot\sqrt{2})^{20}|\cdot|(z-2004-2\cdot i)^{2004}| \Rightarrow$

$\Rightarrow |-2+i|^{20}\cdot|z-2000|^{2004}=|\sqrt{3}+i\cdot\sqrt{2}|^{20}\cdot|z-2004-2\cdot i|^{2004} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{5}^{20}\cdot|z-2000|^{2004}=\sqrt{5}^{20}\cdot|z-2004-2\cdot i|^{2004} \Rightarrow |z-2000|^{2004}=|z-2004-2\cdot i|^{2004} \Rightarrow$

$\Rightarrow |z-2000|=|z-2004-2\cdot i|$.

Αν ερμηνεύσουμε γεωμετρικά την σχέση που προκύπτει είναι η μεσοκάθετη ευθεία στο τμήμα ΑΒ με Α(2000, 0) και Β(2004, 2).

Ο τύπος της είναι : $|z-2000|=|z-2004-2\cdot i| \Rightarrow \sqrt{(x-2000)^2+y^2}=\sqrt{(x-2004)^2+(y-2)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2000)^2+y^2=(x-2004)^2+(y-2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-4000x+2000^2+y^2=x^2-4008x+2004^2+y^2-4y+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4000x+2000^2=-4008x+2004^2-4y+4 \Rightarrow 4y=-8x+16020 \Rightarrow y=-2x+4005$

ΑΣΚΗΣΗ 31

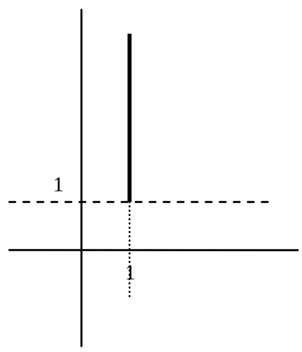
Αποδείξτε ότι το σύνολο των εικόνων του z ∈ C στο μιγαδικό επίπεδο για τους οποίους ισχύει $\begin{Bmatrix} |z-i|\le|z-3| \\ z+\bar{z}=2 \end{Bmatrix}$ είναι ημιευθεία παράλληλη στον άξονα y′y. Ποια είναι η αρχή της.

ΛΥΣΗ

$\begin{Bmatrix} |z-i|\le|z-3| \\ z+\bar{z}=2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} |x+(y-1)\cdot i|\le|(x-3)+y\cdot i| \\ 2x=2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{Bmatrix} |1+(y-1)\cdot i|\le|-2+y\cdot i| \\ x=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt{1+(y-1)^2}\le\sqrt{4+y^2} \\ x=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 1+(y-1)^2\le 4+y^2 \\ x=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1+y^2-2y+1\le 4+y^2 \\ x=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$



$\Rightarrow \begin{Bmatrix} -2y\le 2 \\ x=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} y\ge -1 \\ x=1 \end{Bmatrix}$.

ΑΣΚΗΣΗ 32

Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $|z_1 - z_2| = 2$. Αν για τον $z \in C$ ισχύει :
$(z - z_1)\cdot(\bar{z} - \bar{z}_1) + (z - z_2)\cdot(\bar{z} - \bar{z}_2) = 4$ (1).
α). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $z \in C$.
β). Να βρεθεί το μέγιστο της παράστασης $|z - z_2|$.

ΛΥΣΗ

α). Έστω $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z)$ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z αντίστοιχα.
Ισχύει : $AB = |z_1 - z_2| = 2$
Και η σχέση (1) γράφεται : $(z - z_1)\cdot(\bar{z} - \bar{z}_1) + (z - z_2)\cdot(\bar{z} - \bar{z}_2) = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Rightarrow \Gamma B^2 + \Gamma B^2 = AB^2$. (πυθαγόρειο θεώρημα)
Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $\Gamma = 90^o$.
Επειδή η υποτείνουσα AB είναι σταθερή, και μεταβάλλεται μόνον το Γ.
Συμπεραίνουμε ότι το σημείο Γ βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το μέσο του AB και
Διάμετρο την AB.

β). Η παράσταση $\Gamma B = |z - z_2| = 4$. όσο η διάμετρος του κύκλου.

ΑΣΚΗΣΗ 33

Αν $z_1, z_2 \in C$, $z_1, z_2 \neq 0$ ώστε $z_1 \cdot 2002^{|z_1|} + z_2 \cdot 2002^{|z_2|} = (z_1 + z_2) \cdot 2002^{|z_1+z_2|}$, να αποδείξετε ότι

α). $|z_1 + z_2| = |z_1| = |z_2|$ ή $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \in R$

β). Αν τα σημεία O, $A(z_1)$, $B(z_2)$ δεν είναι συνευθειακά, τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ $(z_2 - z_1)$
και $\overrightarrow{O\Gamma}$ $(z_1 + z_2)$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Υπόδειξη:
α). $z_1 \cdot \left(2002^{|z_1|} - 2002^{|z_1+z_2|}\right) = z_2 \cdot \left(2002^{|z_1+z_2|} - 2002^{|z_2|}\right)$
β). Το παραλληλόγραμμο με κορυφές O(0), $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_1 + z_2)$ είναι ρόμβος.

ΛΥΣΗ

α). $z_1 \cdot 2002^{|z_1|} + z_2 \cdot 2002^{|z_2|} = (z_1 + z_2) \cdot 2002^{|z_1+z_2|} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 \cdot \left(2002^{|z_1|} - 2002^{|z_1+z_2|}\right) = z_2 \cdot \left(2002^{|z_1+z_2|} - 2002^{|z_2|}\right) \Rightarrow$

Γενικά ισχύει : $|z_1 + z_2| \le |z_2| \Rightarrow 2002^{|z_1+z_2|} \le 2002^{|z_2|} \Rightarrow 2002^{|z_1+z_2|} - 2002^{|z_2|} \le 0$

$|z_1 + z_2| \le |z_1| \Rightarrow 2002^{|z_1|} \le 2002^{|z_1+z_2|} \Rightarrow 2002^{|z_1|} - 2002^{|z_1+z_2|} \ge 0$

Επειδή $z_1 \cdot z_2 \neq 0$ έχουμε : $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \cdot \left(2002^{|z_1|} - 2002^{|z_1+z_2|}\right) = \left(2002^{|z_1+z_2|} - 2002^{|z_2|}\right) \Rightarrow$

Διερεύνηση

πρέπει ο αριθμός $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) < 0 \Rightarrow \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \in R$ ή $2002^{|z_1|} - 2002^{|z_1+z_2|} = 2002^{|z_1+z_2|} - 2002^{|z_2|} = 0$

άρα $\begin{Bmatrix} 2002^{|z_1|} - 2002^{|z_1+z_2|} = 0 \\ 2002^{|z_1+z_2|} - 2002^{|z_2|} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} |z_1| - |z_1 + z_2| = 0 \\ |z_1 + z_2| - |z_2| = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} |z_1| = |z_1 + z_2| \\ |z_1 + z_2| = |z_2| \end{Bmatrix} \Rightarrow |z_1 + z_2| = |z_2| = |z_1|$.

ΑΣΚΗΣΗ 34

α). Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων $(1 + i)^4$, $|12 - 5\cdot i|$

β). Να βρεθεί η τιμή του ν $\in$ N με $\nu \geq 2$ ώστε να ισχύει $(12 - 5\cdot i)^{\nu-2} - (1 + i)^4 = 13^{10-\nu} + 4$.

ΛΥΣΗ

α). $(1 + i)^4 = [(1 + i)^2]^2 = (2\cdot i)^2 = 4\cdot i^2 = -4$.

$|12 - 5\cdot i| = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{169} = 13$.

β). $(12 - 5\cdot i)^{\nu-2} - (1 + i)^4 = 13^{10-\nu} + 4 \Rightarrow (12 - 5\cdot i)^{\nu-2} + 4 = 13^{10-\nu} + 4 \Rightarrow (12 - 5\cdot i)^{\nu-2} = 13^{10-\nu} \Rightarrow$

$\Rightarrow |12 - 5\cdot i|^{\nu-2} = |13^{10-\nu}| \Rightarrow 13^{\nu-2} = 13^{10-\nu} \Rightarrow \nu - 2 = 10 - \nu \Rightarrow 2\cdot\nu = 12 \Rightarrow \nu = 6$.

ΑΣΚΗΣΗ 35

Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, 3, $3 + 3\cdot i$, $6 + 3\cdot i$ αντίστοιχα.

α). Να εξετάσετε το είδος του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

β). Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$f(z) = |z| + |z - 3| + |z - 3 - 3\cdot i| + |z - 6 - 3\cdot i|$ με $z \in C$.

Υπόδειξη

α). Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β). $f(z) = |z| + |z - 3| + |z - 3 - 3\cdot i| + |z - 6 - 3\cdot i| = ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ + ΜΔ$

Η ελάχιστη τιμή της f(z) επιτυγχάνεται όταν $z = 3 + \frac{3}{2}\cdot i$, που είναι το σημείο Μ τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου.

ΑΣΚΗΣΗ 36

Δίδεται ο μιγαδικός z με $|z - 1| = 10$ και $\left|z+\frac{1}{3}\right| = 12$. Αν για τον μιγαδικό w ισχύει

$3\cdot w\cdot z + 6 = 6\cdot \bar{z} - w$.

α). Να βρεθεί το μέτρο του $\bar{w}$.

β). Αν για τον μιγαδικό ν ισχύει : $\left(2\cdot\nu-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\bar{\nu}-\frac{3}{4}\right) = 6\cdot w\cdot\bar{w}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού ν.

ΛΥΣΗ

α). $3\cdot w\cdot z + 6 = 6\cdot \bar{z} - w \Rightarrow 3\cdot w\cdot z + w = 6\cdot\bar{z} - 6 \Rightarrow w\cdot 3\cdot(z + \frac{1}{3}) = 6\cdot(\bar{z} - 1) \Rightarrow w = \dfrac{6\cdot\ \bar{z}-1}{3\cdot\left(z+\frac{1}{3}\right)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow w = \frac{2\cdot\ \bar{z}-1}{z+\frac{1}{3}} \Rightarrow |w| = \left|\frac{2\cdot\ \bar{z}-1}{z+\frac{1}{3}}\right| \Rightarrow |w| = \frac{2\cdot|\bar{z}-1|}{\left|z+\frac{1}{3}\right|} \Rightarrow |w| = \frac{2\cdot 10}{12} \Rightarrow |w| = \frac{5}{3}.$$

β). $\left(2\cdot\nu-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\bar{\nu}-\frac{3}{4}\right) = 6\cdot w\cdot\bar{w} \Rightarrow 2\cdot\nu\cdot\bar{\nu} - \frac{3}{2}\bar{\nu} - \frac{3}{2}\cdot\nu + \frac{9}{8} = 6\cdot|w|^2 \Rightarrow 2\cdot|\nu|^2 - \frac{3}{2}\ \nu+\bar{\nu}\ + \frac{9}{8} = 6\cdot\frac{25}{9}$

$\Rightarrow 2\cdot|\nu|^2 - \frac{3}{2}\ \nu+\bar{\nu}\ = \frac{50}{3} - \frac{9}{8} \Rightarrow |\nu|^2 - \frac{3}{4}\ \nu+\bar{\nu}\ = \frac{473}{48} \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - \frac{473}{48} = 0$ (κύκλος)

ΑΣΚΗΣΗ 37

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : C \to C$ με τις επόμενες ιδιότητες
α). $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$, για κάθε $z_1, z_2 \in C$. (1)
β). $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$, για κάθε $z_1, z_2 \in C$. (2)
γ). $f(\alpha) = \alpha$, για κάθε $\alpha \in R$. (3)
Να αποδείξετε ότι : $f(z) = z$ ή $f(z) = \bar{z}$

ΛΥΣΗ

$$f(z) = f(\alpha + i\cdot\beta) \overset{(1)}{=} f(\alpha) + f(i\cdot\beta) \overset{(3)}{=} \alpha + f(i\cdot\beta) \overset{(2)}{=} \alpha + \beta\cdot f(i) \quad (4)$$

$$1 = f(1) = f(-i^2) = f(-i\cdot i) \overset{(2)}{=} f(-i)\cdot f(i) = f(-1\cdot i)\cdot f(i) \overset{(2)}{=}$$

$$= f(-1)\cdot f(i)\cdot f(i) = -f(i)\cdot f(i) = -f^2(i) \Rightarrow$$

Επομένως : $-f^2(i) = 1 \Rightarrow f^2(i) = -1 \Rightarrow f^2(i) = i^2 \Rightarrow f(i) = \pm i$

Άρα η σχέση (4) δίνει αντίστοιχα

$\to$ Αν $f(i) = i$, $(4) \Rightarrow f(z) = \alpha + \beta\cdot f(i) = \alpha + \beta\cdot i = z \Rightarrow f(z) = z$.

$\to$ Αν $f(i) = -i$, $(4) \Rightarrow f(z) = \alpha + \beta\cdot f(i) = \alpha - \beta\cdot i = \bar{z} \Rightarrow f(z) = \bar{z}$.

ΑΣΚΗΣΗ 38

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 και Α, Β οι αντίστοιχες εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο.
Αν (ΑΒ) = (ΑΟ), όπου Ο η αρχή των αξόνων, και $z_1 \neq 0$ να βρείτε τον $\lambda > 0$ για τον οποίο ισχύει η σχέση $z_2 = z_1\cdot(1 + \lambda\cdot i)$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο

ΛΥΣΗ

Έστω $A(z_1)$, $B(z_2)$ οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε $OA = |z_1|$, $|AB| = |z_1 - z_2|$, $OB = |z_2|$.
$z_2 = z_1\cdot(1 + \lambda\cdot i) \Rightarrow z_2 = z_1 + \lambda\cdot z_1\cdot i \Rightarrow z_2 - z_1 = \lambda\cdot z_1\cdot i \Rightarrow |z_2 - z_1| = |\lambda\cdot z_1\cdot i| \Rightarrow |z_2 - z_1| = \lambda\cdot|z_1| \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = \lambda\cdot OA \Rightarrow \lambda = 1$.

Ακόμα : $z_2 = z_1\cdot(1 + \lambda\cdot i) \Rightarrow |z_2| = |z_1\cdot(1 + i)| \Rightarrow |z_2| = |z_1|\cdot|1 + i| \Rightarrow |z_2| = |z_1|\cdot\sqrt{2}$ $OB = OA\cdot\sqrt{2}$

Άρα έχουμε : $\left\{\begin{matrix} OA = |z_1|\cdot\sqrt{2} \\ OB = |z_1| \\ AB = |z_1 - z_2| = |z_1| \end{matrix}\right\} \Rightarrow OB^2 = OA^2 + AB^2$ (πυθαγόρειο θεώρημα)

Άρα το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ 39

α). Να προσδιορίσετε το σύνολο $C_α$ των σημείων M του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z = x + y\cdot i$ με $x, y \in R$ και ικανοποιούν την ισότητα:
$i\cdot(z + \bar{z} - α) + z - \bar{z} = 0$, όπου $α \in R$.

β). Αν A $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \in C_α$, να προσδιορίσετε σημείο $B \in C_α$, τέτοιο ώστε η μεσοκάθετος του AB να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου K_b με εξίσωση: $|z + 1 - 3\cdot i| = β$, με $β > 0$.
Για ποια τιμή του B ο κύκλος K_b εφάπτεται του $C_α$;

ΛΥΣΗ

α). $i\cdot(z + \bar{z} - α) + z - \bar{z} = 0 \Rightarrow i\cdot(2\cdot x - α) + 2i\cdot y = 0 \Rightarrow 2\cdot y + 2\cdot x = α \Rightarrow y + x = \frac{α}{2}$ (ευθεία)

β). Επειδή $A \in C_a$ θα ισχύει : $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{α}{2} \Rightarrow α = 2$

άρα η ευθεία γράφεται : $x + y = 1$.
$|z + 1 - 3\cdot i| = β \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = β^2$, κύκλος με κέντρο $K(-1, 3)$ και ακτίνα β.
Για να διέρχεται η μεσοκάθετος ευθεία από το κέντρο του κύκλου θα πρέπει το σημείο $K(-1, 3)$ (κέντρο του κύκλου) να είναι το μέσο του AB όπου $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ και $B(x_B, y_B)$.

Επομένως : $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_B - \frac{1}{2}}{2} = -1 \\ \dfrac{y_B + \frac{3}{2}}{2} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_B - \frac{1}{2} = -2 \\ y_B + \frac{3}{2} = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_B = \frac{1}{2} - 2 \\ y_B = 6 - \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_B = -\frac{3}{2} \\ y_B = \frac{9}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow B\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$.