ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1). Αν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας $(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}-\vec{\beta}})$.

2). Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα στοιχείο της στήλης Β :

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
$\lvert\vec{\alpha}+\vec{\beta}\rvert = \lvert\vec{\alpha}\rvert+\lvert\vec{\beta}\rvert$	$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντίρροπα
$\lvert\vec{\alpha}+\vec{\beta}\rvert = \big\lvert\lvert\vec{\alpha}\rvert-\lvert\vec{\beta}\rvert\big\rvert$	$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ομόρροπα
$\big\lvert\lvert\vec{\alpha}\rvert-\lvert\vec{\beta}\rvert\big\rvert=\lvert\vec{\alpha}+\vec{\beta}\rvert=\lvert\vec{\alpha}\rvert+\lvert\vec{\beta}\rvert$	$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά
$\big\lvert\lvert\vec{\alpha}\rvert-\lvert\vec{\beta}\rvert\big\rvert<\lvert\vec{\alpha}+\vec{\beta}\rvert<\lvert\vec{\alpha}\rvert+\lvert\vec{\beta}\rvert$	$\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$

3). Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν $\lvert\vec{\beta}\rvert = 2\cdot\lvert\vec{\alpha}\rvert$ και $\lvert\vec{\alpha}+\vec{\beta}\rvert=\lvert\vec{\alpha}\rvert$, αποδείξτε ότι τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα .

4). Αν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $3\cdot\lvert\vec{\alpha}\rvert = 4\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert = 12\cdot\lvert\vec{\gamma}\rvert$, αποδείξτε ότι :

i) τα $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα και ii) τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα .

5). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i). $\lvert\overrightarrow{\text{ΜΑ}}\rvert = \lvert\overrightarrow{\text{ΜΒ}}\rvert$ (ΑΒ : γνωστό ευθύγραμμο τμήμα)

ii)/ $\overrightarrow{\text{ΑΜ}} \parallel \overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ (ΑΒΓ : γνωστό τρίγωνο)

iii). $2\cdot\lvert\overrightarrow{\text{ΜΑ}}\rvert^2 = 5\cdot\lvert\overrightarrow{\text{ΑΜ}}\rvert - 2$ (Α : γνωστό σημείο)

6). Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ της διαγωνίου ΑΓ έτσι ώστε: $\text{ΑΕ} = \text{ΖΓ} = \frac{1}{4}\cdot\text{ΑΓ}$

α). Αν $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\text{ΒΓ}} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΔΕ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΔΖ}}$, συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β). Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

7). Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ , Κ το κέντρο του, Μ το μέσον του ΚΓ.
Δείξτε ότι : $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}+\overrightarrow{\text{ΑΔ}}=4\cdot\overrightarrow{\text{ΑΜ}}-2\cdot\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$.

8). Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ , ΓΔ αντιστοίχως.
Να δείξετε ότι : i) $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}+\overrightarrow{\text{ΒΓ}}=2\cdot\overrightarrow{\text{ΚΛ}}$ και ii). $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}+\overrightarrow{\text{ΒΔ}}=2\cdot\overrightarrow{\text{ΚΛ}}$.

9). Αν Ο είναι η τομή των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να δείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει $\overrightarrow{\text{ΜΑ}}+\overrightarrow{\text{ΜΒ}}+\overrightarrow{\text{ΜΓ}}+\overrightarrow{\text{ΜΔ}}=4\cdot\overrightarrow{\text{ΜΟ}}$.

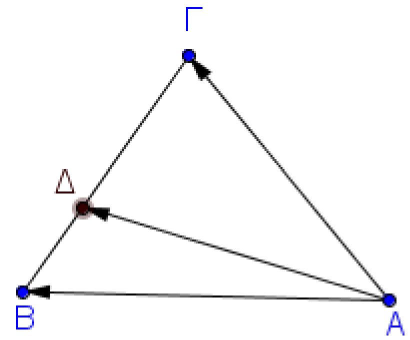
10). Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ . Θεωρούμε σημείο Η τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AH} = -4 \cdot \overrightarrow{AM}$.

Να δείξετε ότι : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{10} \cdot \left(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{H\Gamma}\right)$.

11). Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΓ = 3·ΔΒ .

$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{x}$

Αποδείξτε ότι $\vec{x} = \frac{1}{4} \cdot \left(3 \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$.



12). Θεωρούμε τις κάθετες χορδές ΑΒ , ΓΔ ενός κύκλου με κέντρο Ο , οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ . Αποδείξτε ότι $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = 2 \cdot \overrightarrow{MO}$.

13). Αν $\overrightarrow{A\Gamma} = -\kappa \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \kappa \cdot \overrightarrow{\Delta B}$, να βρείτε τον κ ∈ R ώστε το Γ να είναι το μέσο του τμήματος ΑΔ .

$\vec{\alpha}$

14). Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Μ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{N\Gamma} = -2 \cdot \overrightarrow{MB}$.

Να αποδειχτεί ότι : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

15). Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Μ τέτοιο ώστε να είναι $3 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \vec{0}$.

Να αποδειχτεί ότι : $3 \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma}$.

16). Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ. Αποδείξτε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $\vec{\delta} = 5 \cdot \overrightarrow{MA} - 8 \cdot \overrightarrow{M\Gamma} + 3 \cdot \overrightarrow{MB}$ είναι σταθερό.

17). Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο $\lambda \in \Re$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = \overrightarrow{MA} + 2 \cdot \overrightarrow{MB} + \lambda \cdot \overrightarrow{M\Gamma}$ να είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

18). Να βρείτε σημείο Ρ του επιπέδου ενός τριγώνου ΑΒΓ , τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AP} + 2 \cdot \overrightarrow{BP} + 3 \cdot \overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$.

19). Να βρείτε σημείο Ρ του επιπέδου ενός τριγώνου ΑΒΓ , τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AP} + 3 \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{\Gamma P}$.

20). Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Να βρείτε σημείο Ρ τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{P\Delta}$.

21). Αν ισχύει $7\cdot\overrightarrow{MB}+3\cdot\overrightarrow{M\Gamma}=4\cdot\overrightarrow{MA}$, να δείξετε ότι τα σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά .

22). Να αποδείξετε ότι αν $(\kappa+2)\cdot\overrightarrow{PA}+3\cdot\overrightarrow{PB}=(\kappa+5)\cdot\overrightarrow{P\Gamma}$, ότε τα σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά.

23). Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ , Ε και Ζ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις :
$\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma E}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{AZ}=\frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

α). Αν $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$, συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β). Αποδείξτε ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

24). Αν $\overrightarrow{OA}=2\cdot\vec{\alpha}+3\cdot\vec{\beta}-5\cdot\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB}=4\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}+6\cdot\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=-2\cdot\vec{\alpha}+11\cdot\vec{\beta}-27\cdot\vec{\gamma}$, τότε να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

25). α). Αν $\vec{x}$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα , να δείξετε ότι το διάνυσμα $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ έχει μέτρο 1 και είναι ομόρροπο του $\vec{x}$.

β). Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα , να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\delta}=\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}+\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ είναι παράλληλο προς τη διχοτόμο της γωνίας $\left(\widehat{\vec{\alpha}.\vec{\beta}}\right)$.

γ). Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα , να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\varepsilon}=|\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}$ είναι παράλληλο προς τη διχοτόμο της γωνίας $\left(\widehat{\vec{\alpha}.\vec{\beta}}\right)$.

26). α). Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά διανύσματα με $\lambda\vec{\alpha}+\mu\cdot\vec{\beta}=\vec{0}$, να δείξετε ότι $\lambda=\mu=0$.

β). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ τα οποία δεν είναι συγγραμμικά ανά δύο.
Αν $\vec{\alpha}//\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$/ και $\vec{\beta}//\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right)$, να δείξετε ότι $\vec{\gamma}//\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$.

27). Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ / / ΓΔ . Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του να αποδειχθεί ότι :

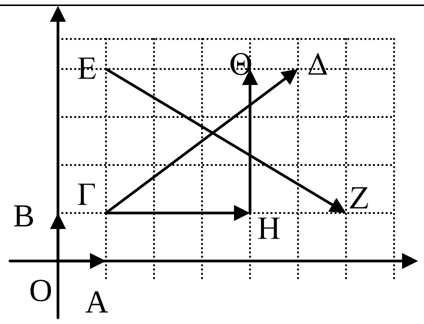
α). $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right)$.

β). Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι παράλληλο προς τις βάσεις του.

28). Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 4 . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει : $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|4\cdot\overrightarrow{MA}-4\cdot\overrightarrow{MB}\right|$.

29). Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Δ της ΒΓ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου του τριγώνου για τα οποία ισχύει : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=\lambda\cdot\overrightarrow{A\Delta}$, όπου το λ διατρέχει το διάστημα [−1, 2].

.

30). Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων είναι $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$. Να εκφράσετε ως Γραμμικό συνδυασμό των $\vec{i}, \vec{j}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}, \overrightarrow{EZ}$, $\overrightarrow{H\Theta}, \overrightarrow{\Gamma H}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες τους	

31). Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 4, \lambda + 2)$, όπου $\lambda \in R$.
α). Να βρείτε το λ ώστε το $\vec{\alpha}$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα .
β). Αν $\vec{\beta} = (4\cdot\lambda - 7, 3)$, να βρείτε το λ ώστε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

32). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-1, 2)$, $\vec{\gamma} = (-1, 1)$.
α). Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v} = 5\cdot\vec{\alpha} - 2\cdot\vec{\beta} + 3\cdot\vec{\gamma}$.
β). Να εκφραστεί το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

33). Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Κ . Αν Α(1, 2), Β(5, 3) και Κ(4, 5), να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ.

34). Αν τα σημεία Κ(4, 0) , Λ(6, 2), Μ(3, 5) είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ , ΒΓ, ΑΓ αντιστοίχως του τριγώνου ΑΒΓ, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου.

35). Δίνονται τα σημεία Α(3, − 4) και Β(2, 1). Να βρείτε :
α). το συμμετρικό του Α ως προς κέντρο συμμετρίας το Β.
β). το συμμετρικό του Β ως προς κέντρο συμμετρίας το Α.

36). Δίνονται τα σημεία Α(1, 2), Β(3, 5), Γ(5, 7), Δ(− 10, −11).
α). Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.
β). Να εκφραστεί το $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$.

37). Αν για τα σημεία Α, Β, Μ ισχύει $\overrightarrow{AM} = 2\cdot\overrightarrow{MB}$ και Α(− 1, 2), Β(3, − 1), να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

38). Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(−1 , 4), Β(5, 2) και κέντρο βάρους G(0, −3). Να βρείτε τις συντεταγμένες : i). του μέσου Μ της ΑΒ , ii). της κορυφής Γ.

39). Δίνονται τα σημεία Α(1, 3), Β(– 2, –5) και Γ(1, 7).

α). Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$.

β). Να βρείτε σημείο Η του άξονα x′x ώστε το τρίγωνο ΑΒΗ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Η .

40. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a ,b , c , d , e , f , g , h δείξτε ότι :

$$\sqrt{(b-a)^2+(f-e)^2} \le \sqrt{(c-a)^2+(g-e)^2}+\sqrt{(d-c)^2+(h-g)^2}+\sqrt{(d-b)^2+(h-f)^2}$$

41). Δίνονται τα σημεία Α(16, $-\lambda^2$), Β(λ^2, $-4\cdot\lambda$). Αν $\vec{\nu}=\overrightarrow{AB}$, να βρείτε τον λ ∈ R.
ώστε : i). $\vec{\nu}$ // x′x και $\vec{\nu} \neq \vec{0}$, ii). $\vec{\nu}$ // y′y και $\vec{\nu} \neq \vec{0}$.

42). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 5, -2\cdot\lambda)$, $\vec{\beta} = (-2, 1)$, όπου λ ∈ R.

α). Να βρείτε το λ ώστε $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

β). Για ποια τιμή του λ τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα ;

γ). Για ποια τιμή του λ τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα ;

43). Να βρεθεί ο κ ∈ R ώστε τα σημεία Α(κ, κ – 1), Β(–1, 3), Γ(2·κ, 6) να είναι συνευθειακά.

44). Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\sqrt{12}, \kappa^2 + 2)$, όπου κ ∈ R.

α). Να βρείτε το κ ώστε το $\vec{\alpha}$ να σχηματίζει γωνία 60^o με τον άξονα x′x.

β). Για τις τιμές του κ που βρήκατε στο (α) ερώτημα , να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\beta} = (\sqrt{75}, 15)$ είναι παράλληλο προς το $\vec{\alpha}$.

45). Για ποιες τιμές του λ ∈ R τα σημεία Α(1, 2), Β(4, 3), Γ(6, – 1) , Δ(λ, 2·λ – 1) είναι κορυφές τραπεζίου ΑΒΓΔ ;

46). Να βρείτε σημείο Μ του άξονα x΄x, ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα σημεία Α(1, 2) και Β(3, 4) να είναι ελάχιστο.

47). Έστω ΑΒΓ ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2 . Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα : $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Lambda}\cdot\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}$.

48). Έστω $\vec{\alpha} = (\kappa - 1, -2)$ και $\vec{\beta} = (-4, 10)$. Να βρείτε τον κ ∈ R, στις επόμενες περιπτώσεις :
i). $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 20$, ii). $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

49). Αν $\vec{\alpha} = (0, -\sqrt{2})$ και $\vec{\beta} = (1, -1)$, να βρείτε :
α). το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, β). το ($3\left(3\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}+2\cdot\vec{\beta}\right)$, γ). την γωνία των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

50). Καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) . Κυκλώστε το Σ ή το Λ :

$\lvert\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\rvert \le \lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$	Σ	Λ
Αν $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$ τότε $\lvert\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\rvert = \lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$	Σ	Λ
$\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$	Σ	Λ
Αν $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$ τότε $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$	Σ	Λ
$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right) = \vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2$	Σ	Λ
$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2+2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2$	Σ	Λ
$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\right) = \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}$	Σ	Λ
$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)^2 = \vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2+2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+2\cdot\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$	Σ	Λ
Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$, με $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$	Σ	Λ
$\vec{\alpha}^3 = \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\alpha}$	Σ	Λ

51). Αν $\lvert\vec{\alpha}\rvert$ = 1 , $\lvert\vec{\beta}\rvert$ = 2 και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ = $\dfrac{2\cdot\pi}{3}$, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = \vec{\alpha}-2\cdot\vec{\beta}$.

52). Αν $\lvert\vec{\alpha}\rvert$ = $\lvert\vec{\beta}\rvert \neq 0$ και $\lvert\vec{\alpha}+\vec{\beta}\rvert = \lvert\vec{\alpha}\rvert$ τότε :

α). να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\dfrac{1}{2}\cdot\lvert\vec{\alpha}\rvert^2$,

β). να δείξετε ότι η $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ είναι αμβλεία,

γ). να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\cdot\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\cdot\vec{\alpha}+2\cdot\vec{\beta}$.

53). Αν $\lvert\vec{\alpha}\rvert$ = 5, $\lvert\vec{\beta}\rvert$ = 3 και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ = 53^o, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = -3\cdot\vec{\alpha}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha}-\vec{\beta}$. Δίνονται συν53^o = $\dfrac{3}{5}$ και συν37^o = $\dfrac{4}{5}$.

54). Αν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ - $\sqrt{3}\,\vec{\gamma}$ = $\vec{0}$ και $\lvert\vec{\alpha}\rvert$ = $\lvert\vec{\beta}\rvert$ = $\lvert\vec{\gamma}\rvert$ = 1, να υπολογίσετε :

α) το $\vec{\beta},\vec{\gamma}$, β). τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})$.

55). Αν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\lvert\vec{\alpha}\rvert$ = 1 , $\lvert\vec{\beta}\rvert$ = 2 , $\lvert\vec{\gamma}\rvert$ = 3 τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

56). α). Αν $x^2 + y^2 = 4$ και $A = 8\cdot x + 6\cdot y$, να δείξετε ότι $-20 \le A \le 20$.

β). Αν $x^{38} + y^{12} = 2$ και $x^{12} + y^{38} = 2$, να δείξετε ότι $-2 \le x^{25} + y^{25} \le 2$.

57). Αν $\vec{\alpha} = (\kappa, \lambda)$, $\vec{\beta} = (\mu, \nu)$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι :

$\kappa\cdot\nu - \lambda\cdot\mu = 4$ ή $\kappa\cdot\nu - \lambda\cdot\mu = -4$.

58. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 5$, $|\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = -20$, να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά .

59). Θεωρούμε τα μη μηδενικά συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Αν ισχύει η σχέση

$\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} + \dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|} + \dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\gamma}|\cdot|\vec{\alpha}|} = -1$, να δείξετε ότι δύο από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι αντίρροπα

.

60). Θεωρούμε τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

α). Αποδείξτε ότι $|\vec{\alpha}| \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$.

β). Αν $|2\cdot\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 5$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{13}$, να βρείτε τα $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$.

61). Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$, τότε να δείξετε ότι $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\cdot\sqrt{3}$.

62). Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε

$\vec{x} \,//\, \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$ και $\vec{\beta} \perp \left(\vec{\alpha} + \vec{x}\right)$.

63). α). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, 4)$, $\vec{\gamma} = (1, -1)$. Δείξτε ότι : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$.

β). Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά με $\vec{\gamma} \ne \vec{0}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

64). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 5)$, $\vec{\beta} = (2, -1)$.

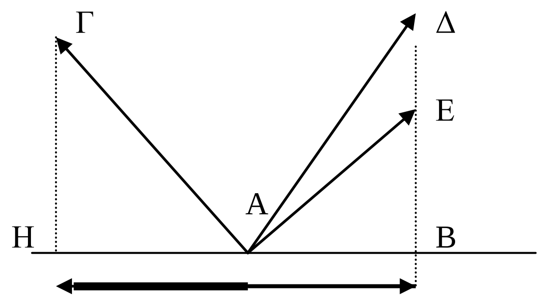
α). Να βρείτε την $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$.

β). Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο συνιστώσες , μία παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και μία κάθετη προς αυτό.

65). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}$, με $\vec{\beta} \ne \vec{0}$, τέτοια ώστε $\vec{\alpha} + \vec{x} = \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{x}$.

Αποδείξτε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

66). Για το διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$S = \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}$, αν είναι γνωστό ότι ΑΒ = 2 και ΑΗ = 3.



67). Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ σχηματίζουν γωνίες 20^o , 50^o , 95^o αντίστοιχα με τον άξονα x′x. Ακόμη είναι $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 3$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$, σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις αυτές των $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$.

68). Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως : $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$, $\overrightarrow{p // \alpha}$, $\vec{q} \perp \vec{\beta}$.

69). Στο επίπεδο δίνονται τα σταθερά σημεία Α, Β και έστω Κ το μέσο του ΑΒ . Αν Ο είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου , να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει : $\overrightarrow{OM}^2 - 2\cdot\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

70). Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου του, για τα οποία ισχύει : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM} = \vec{0}$.

71). Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 5. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 15$.

72). Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Α , Γ τετραγώνου ΑΒΓΔ του οποίου γνωρίζουμε τις απέναντι κορυφές Β(3, 2), Δ(1, 0).