ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

1). Δίδεται η f: $R \setminus \{2\} \to R$, με τύπο $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. Να βρεθεί η αντίστροφή της.

2). Να βρεθούν οι αριθμοί x, y που ικανοποιούν την εξίσωση:
$x^2 + y^2 = 4\cdot x + 3\cdot y$

3). Να βρεθεί το $\lambda \in R$, ώστε ο αριθμός 1, να είναι μεταξύ των ριζών του τριωνύμου $f(x) = (\lambda - 3)\cdot x^2 + 2\cdot(\lambda - 2)\cdot x + \lambda - 4$, με $\lambda \neq 3$

4). Χωρίς να χρησιμοποιηθεί η διακρίνουσα να αποδείξετε ότι το τριώνυμο
$f(x) = (x + 1)\cdot(x - 2) + (x + 1)\cdot(x - 3) + (x - 2)\cdot(x - 3)$
έχει ρίζες άνισες πραγματικές.

5). Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\rho^2 - 3\cdot\rho - 2 = 0$ να λυθεί το σύστημα
$$\begin{Bmatrix} (\rho_1+\rho_2)\cdot x^2 - 5\cdot y^2 = \rho_1\cdot\left(1-2\cdot\rho_2\right)+\rho_2 \\ x+y=\rho_1\cdot\rho_2+1 \end{Bmatrix}$$

6). Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^3 - 3000\cdot\lambda\cdot x + \lambda^2 = 0$, $\lambda \in (0, 3)$
Δείξτε ότι: $\frac{1}{|\rho_1|} + \frac{1}{|\rho_2|} \succ 1000$

7). Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $\alpha\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma = 0$, να βρεθεί η εξίσωση της οποίας οι ρίζες είναι $\rho_1 = \frac{x_1}{x_2}$ και $\rho_2 = \frac{x_2}{x_1}$.

8). Δίδεται η συνάρτηση $f{:}R\to R$, με $f(x) = \alpha\cdot x + \beta$, όπου $\alpha \neq 0$.
α). Να βρεθεί η αντίστροφή της
β). Να βρεθούν τα α, β ώστε $f = f^{-1}$.

9). Δίδεται η συνάρτηση f: $R^* \to R^*$, για τα οποία ισχύει η σχέση
$2\cdot f(x) - f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$, $\forall\, x \in R^*$. Να βρεθεί ο τύπος της.

10).Δίδεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση $f(x - 2) = x^2 - 5\cdot x + 6$, $\forall\, x \in R$. Να βρεθεί ο τύπος της.

11).Να απλοποιηθεί ο τύπος της συνάρτησης f με $f(x - 2) = \big|\,|\alpha - x| + |\beta - x|\,\big|$
Αν το πεδίο ορισμού είναι το (α, β).

12).Δίδεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{x+3} - \frac{x-2}{x-4}$. Να ορισθεί η $\frac{1}{f}$.

13).Δίδεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{x+4} + 2$. Να ορισθεί η $\frac{1}{f}$.

14).Δίδεται η συνάρτηση f: R→R, έτσι ώστε ∀ x ∈ R, να ισχύει η σχέση $f(2 - x) + 2\cdot f(x - 2) = x$. Να βρεθεί η f(x).

15).Δίδεται συνάρτηση f: Z→R, με $f(x) = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x} + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x} + 3$

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f Δεν είναι «1−1», αποδεικνύοντας ότι $f(-x) = f(x)$.

16).Να βρεθεί το άθροισμα των κλασμάτων με παρονομαστές (x − 1), (x − 2) που δίνει το άθροισμα $\dfrac{2x}{(x-1)\cdot(x-2)}$.

17).Να βρεθεί το άθροισμα των κλασμάτων με παρονομαστές (x − 1), (x − 2) που δίνει το άθροισμα $\dfrac{4}{(x-1)\cdot(x-2)}$.

18).Να βρεθεί το άθροισμα των κλασμάτων με παρονομαστές (x − 1), (x +2) που δίνει το άθροισμα $\dfrac{2}{(x-1)\cdot(x+2)}$.

19).Αν α, β, γ είναι διαφορετικοί ανα δύο να δειχθεί ότι:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha^3+\beta^3+\alpha^2+\beta^2=k \\ \beta^3+\gamma^3+\beta^2+\gamma^2=k \\ \alpha^3+\gamma^3+\alpha^2+\gamma^2=k \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=-1$$

20).Αν α + β + γ = 1, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=1$, να δειχθεί ότι: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 1$.

21).Δίδονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{3\cdot|x|}{x}$ και $g(x) = \left\{\begin{array}{ll} -3, & x<0 \\ 3\ , & x\geq 0 \end{array}\right\}$.

Να δειχθεί ότι f = g.

22).Δίδεται η συνάρτηση f: R→R, με $f(x) = x + 2$, να βρεθούν τα α, β∈ R, ώστε η συνάρτηση g: R→R, με $g(x) = \alpha\cdot f(x - 3) + \beta\cdot f(x - 4)$, να είναι ταυτοτική

23).Αν α, β, γ, δ διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, να δειχθεί ότι:

i). $\beta\cdot\gamma - \alpha\cdot\delta = 2$

ii). $\beta\cdot\delta - \alpha\cdot\gamma$ είναι περιττός

iii).$\alpha + \beta + \gamma + \delta$ είναι άρτιος και όχι πολ/σιο του 4.

24).Να λυθούν οι εξισώσεις

i). $(2x^3 - 2\cdot x^2)\cdot(9x^2 - 1) = 0$ ii). $(x - 3)^3 + (2x - 5)^3 + (8 - 3\cdot x)^3 = 0$

25).Αν ν είναι περιττός αριθμός να δειχθεί ότι $\nu^2 + \nu$ ότι είναι άρτιος.