ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ - ΠΡΑΞΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να δείξετε ότι $(x-2)^3 + (3\cdot x-4)^3 + (6-4\cdot x)^3 = 3\cdot(x-2)\cdot(3\cdot x-4)(6-4\cdot x)$.

Λύση

Στο 1^0 μέλος βλέπουμε άθροισμα κύβων 3 αριθμών , εξετάζουμε αν έχουν άθροισμα 0,
$(x-2) + (3\cdot x-4) + (6-4\cdot x) = x + 3\cdot x - 4\cdot x - 2 - 4 + 6 = 0$ άρα το άθροισμα των κύβων τους ισούται με το τριπλάσιο γινόμενό τους , οπότε
$(x-2)^3 + (3\cdot x-4)^3 + (6-4\cdot x)^3 = 3\cdot(x-2)\cdot(3\cdot x-4)\cdot(6-4\cdot x)$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να δείξετε ότι $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) = (\alpha\cdot x+\beta\cdot y)^2 + (\alpha\cdot y-\beta\cdot x)^2$ (Lagrange)

Λύση

Κάνουμε πράξεις στο πρώτο μέλος (επιμεριστική)
$(\alpha^2+\beta^2)\cdot(x^2+y^2) = \alpha^2\cdot x^2 + \alpha^2\cdot y^2 + \beta^2\cdot x^2 + \beta^2\cdot y^2$.
Πράξεις στο δεύτερο μέλος (αναλύουμε τις ταυτότητες)
$(\alpha\cdot x+\beta\cdot y)^2 + (\alpha\cdot y-\beta\cdot x)^2 = \alpha^2\cdot x^2 + \beta^2\cdot y^2 + 2\cdot\alpha\cdot x\cdot\beta\cdot y + \alpha^2\cdot y^2 + \beta^2\cdot x^2 - 2\cdot\alpha\cdot x\cdot\beta\cdot y =$
$\alpha^2\cdot x^2 + \alpha^2\cdot y^2 + \beta^2\cdot x^2 + \beta^2\cdot y^2$. Άρα ισχύει η παραπάνω ταυτότητα

<u>Βασική σχέση</u> : Αν $\alpha^2+\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να δείξετε ότι αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\cdot\beta + \beta\cdot\gamma + \alpha\cdot\gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$.

ΛΥΣΗ

Πολλαπλασιάζω την σχέση που μου έδωσε επί 2 για να δημιουργήσω τα διπλάσια γινόμενα και να φτιάξω ταυτότητες $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\alpha\cdot\gamma \Leftrightarrow 2\cdot\alpha^2+2\cdot\beta^2+2\cdot\gamma^2 = 2\cdot\alpha\cdot\beta+2\cdot\beta\cdot\gamma+2\cdot\alpha\cdot\gamma \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha^2+\alpha^2+\beta^2+\beta^2+\gamma^2+\gamma^2-2\cdot\alpha\cdot\beta-2\cdot\beta\cdot\gamma-2\cdot\alpha\cdot\gamma = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\alpha^2+\beta^2-2\cdot\alpha\cdot\beta) + (\beta^2+\gamma^2-2\cdot\beta\cdot\gamma) + (\alpha^2+\gamma^2-2\cdot\alpha\cdot\gamma) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\alpha-\gamma)^2 = 0$.
Ένα άθροισμα τετραγώνων ισούται με μηδέν , άρα όλοι οι όροι είναι 0

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta \\ \beta-\gamma=0 \Leftrightarrow \beta=\gamma \\ \alpha-\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha=\gamma\end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να απλοποιηθεί η παράσταση : $\dfrac{2x^2-\alpha x-\alpha^2}{x-\alpha}$.

ΛΥΣΗ

Για να ορίζεται το κλάσμα πρέπει ο παρονομαστής να μην είναι 0 : $x-\alpha \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \alpha$.
Για να απλοποιήσω το κλάσμα πρέπει να παραγοντοποιήσω τους όρους :

$$\frac{2x^2-\alpha x-\alpha^2}{x-\alpha} = \frac{x^2+x^2-\alpha x-\alpha^2}{x-\alpha} = \frac{x^2-\alpha x+x^2-\alpha^2}{x-\alpha} = \frac{x(x-\alpha)+(x-\alpha)(x+\alpha)}{x-\alpha} =$$

$$= \frac{(x-\alpha)(x+x+\alpha)}{x-\alpha} = \frac{(x-\alpha)(2x+\alpha)}{x-\alpha} = 2x+\alpha .$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να υπολογιστεί η παράσταση $12^{80}\cdot 4^{-41}\cdot 6^{-78}$.

ΛΥΣΗ

Αναλύουμε τις βάσεις και εφαρμόζουμε ιδιότητες δυνάμεων :

$12^{80}\cdot 4^{-41}\cdot 6^{-78} = (3\cdot 2^2)^{80}\cdot(2^2)^{-41}\cdot(2\cdot 3)^{-78} = 3^{80}\cdot 2^{160}\cdot 2^{-82}\cdot 2^{-78}\cdot 3^{-78} = 2^{160}\cdot 2^{-82}\cdot 2^{-78}\cdot 3^{80}\cdot 3^{-78} =$
$= 2^{160-82-78}\cdot\cdot 3^{80-78} = 2^0\cdot 3^2 = 1\cdot 9 = 9.$

ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδειχθεί ότι αν α, β ομόσημοι τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

(αν αντιστρέψω τους όρους αλλάζει φορά η ανίσωση).

ΛΥΣΗ

Έχω $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\cdot\beta} < \frac{\beta}{\alpha\cdot\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$. [διαιρώ με $\alpha\cdot\beta > 0$]

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δείξτε ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\cdot\alpha\cdot\beta$.

ΛΥΣΗ

Για να αποδείξω μια ανίσωση υποθέτω ότι ισχύει και κάνω πράξεις για να καταλήξω σε μία σωστή σχέση. Υποθέτω ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$ (που ισχύει σαν τέλειο τετράγωνο).

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δείξτε ότι αν $\alpha > 0$ τότε $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.

ΛΥΣΗ

$\alpha > 0$

Υποθέτω ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Rightarrow \alpha^2 + 1 > 2\cdot\alpha \Rightarrow \alpha^2 - 2\cdot\alpha + 1 \geq 0 \Rightarrow (\alpha-1)^2 \geq 0$.

(που ισχύει σαν τέλειο τετράγωνο)

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δείξτε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\cdot\beta + \beta\cdot\gamma + \alpha\cdot\gamma$.

ΛΥΣΗ

Έστω $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\cdot\beta + \beta\cdot\gamma + \alpha\cdot\gamma \Leftrightarrow$ [πολλαπλασιάζω επί 2 για να φτιάξω ταυτότητες]

$\Leftrightarrow 2\cdot\alpha^2 + 2\cdot\beta^2 + 2\cdot\gamma^2 \geq 2\cdot\alpha\cdot\beta + 2\cdot\beta\cdot\gamma + 2\cdot\alpha\cdot\gamma \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \gamma^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta - 2\cdot\beta\cdot\gamma - 2\cdot\alpha\cdot\gamma \geq 0$

$\Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta) + (\beta^2 + \gamma^2 - 2\cdot\beta\cdot\gamma) + (\alpha^2 + \gamma^2 - 2\cdot\alpha\cdot\gamma) \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\alpha-\gamma)^2 > 0$.

(ισχύει σαν άθροισμα τετραγώνων)

ΑΣΚΗΣΗ 5

Αν $\alpha < \beta$ να συγκριθούν οι αριθμοί $A = \alpha^3 - \beta^3$ και $B = \alpha\cdot\beta^2 - \beta\cdot\alpha^2$.

ΛΥΣΗ

Για να συγκρίνω δύο αριθμούς, βρίσκω το πρόσημο στη διαφορά τους Παίρνω τη διαφορά τους

$Α - Β = (α^3 - β^3) - (α\cdot β^2 - β\cdot α^2) = α^3 - α\cdot β^2 - β^3 + β\cdot α^2 = α\cdot(α^2 - β^2) + β\cdot(α^2 - β^2) =$
$= (α^2 - β^2)\cdot(α + β) = (α - β)\cdot(α + β)\cdot(α + β) = (α - β)\cdot(α + β)^2 \leq 0$
γιατί $\{ (α + β)^2 > 0$ και $α < β \Leftrightarrow α - β < 0 \}$.
Αποδείξαμε ότι η διαφορά τους είναι $Α - Β \leq 0 \Leftrightarrow Α < Β$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Αν $4 \leq x \leq 5$ και $6 \leq y \leq 7$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις α). $2\cdot x - 3\cdot y + 3$ β). $x\cdot y$ γ). $\frac{x}{y}$ δ). $x^2 - y^2$.

ΛΥΣΗ
α). Δεν μπορώ να αφαιρέσω κατά μέλη, αλλάζω πρόσημα στη δεύτερη ανίσωση και προσθέτω
$4 < x < 5 \Leftrightarrow 8 < 2\cdot x < 10$ (1) (πολλαπλασιάζω με 2)
$6 < y < 7 \Leftrightarrow -18 > 3\cdot y > -21 \Leftrightarrow -21 \leq 3\cdot y \leq -18$ (2) (πολλαπλασιάζω με -3)
Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε :
$8 - 21 < 2\cdot x - 3\cdot y < 10 - 18 \Leftrightarrow -13 < 2\cdot x - 3\cdot y < -8 \Leftrightarrow -13 + 3 < 2\cdot x - 3\cdot y < -8 + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -10 < 2\cdot x - 3\cdot y < -5$.

β). Πολλαπλασιάζω κατά μέλη (επειδή όλοι οι όροι είναι θετικοί)
$\{ 4 < x < 5$ και $6 \leq x\cdot y \leq 7 \} \Rightarrow 24 < x\cdot y < 35 \Rightarrow 24 < x\cdot y < 35$.

γ). δεν μπορώ να διαιρέσω κατά μέλη (αντιστρέφω την δεύτερη σχέση και αντί για διαίρεση κάνω πολλαπλασιασμό)
ισχύει : $4 < x < 5$ (1)
και $6 \leq y \leq 7 \Rightarrow \frac{1}{6} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{7} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{6}$ (2)
πολλαπλασιάζω τις (1) και (2) έχουμε : $4 \cdot \frac{1}{7} < x \cdot \frac{1}{y} < 5 \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{4}{7} < \frac{x}{y} < \frac{5}{6}$.
δ). $6 \leq y \leq 7 \Leftrightarrow 36 \leq y^2 \leq 49 \Leftrightarrow -36 > -y^2 \geq -49 \Leftrightarrow -49 < -y^2 < -36$ (1)
και έχουμε : $4 < x < 5 \Leftrightarrow 16 < x^2 < 25$ (2)
προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε : $16 - 49 < x^2 - y^2 < 25 - 36 \Rightarrow -33 < x^2 - y^2 < 25 - 36 \Rightarrow$
$\Rightarrow -33 < x^2 - y^2 < -11$.

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1
Να λυθεί η εξίσωση : $|x - 5| = 3$.
ΛΥΣΗ
Έχω δύο περιπτώσεις :
i). $x - 5 = 3 \Leftrightarrow x = 5 + 3 \Leftrightarrow x = 8$.
ii). $x - 5 = -3 \Leftrightarrow x = 5 - 3 \Leftrightarrow x = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = |4 - 3\cdot x|$.

ΛΥΣΗ
Τα απόλυτα τους είναι ίσα άρα οι απόλυτες ποσότητες είναι ίσες ή αντίθετες.

$\rightarrow$ $x - 2 = 4 - 3\cdot x \Leftrightarrow x + 3\cdot x = 4 + 2 \Leftrightarrow 4\cdot x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

$\rightarrow$ $x - 2 = -(4 - 3\cdot x) \Leftrightarrow x - 2 = -4 + 3\cdot x \Leftrightarrow x - 3\cdot x = -4 + 2 \Leftrightarrow -2\cdot x = -2 \Leftrightarrow x = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να λυθεί η εξίσωση $|5\cdot x - 2| = x$

ΛΥΣΗ

Παίρνω περιπτώσεις για την παράσταση που είναι μέσα στο απόλυτο

$\rightarrow$ Αν $5\cdot x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 5\cdot x \geq 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{5}$ τότε έχω :

$|5\cdot x - 2| = x \Leftrightarrow 5\cdot x - 2 = x \Leftrightarrow 5\cdot x - x = 2 \Leftrightarrow 4\cdot x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (δεκτή γιατί $\frac{1}{2} \geq \frac{2}{5}$).

ii). Αν $5\cdot x - 2 < 0 \Leftrightarrow 5\cdot x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{5}$ τότε έχω :

$|5\cdot x - 2| = x \Leftrightarrow -(5\cdot x - 2) = x \Leftrightarrow -5\cdot x + 2 = x \Leftrightarrow -5\cdot x - x = -2 \Leftrightarrow -6\cdot x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

(δεκτή γιατί $\frac{1}{3} \geq \frac{2}{5}$).

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να λυθεί η εξίσωση $3\cdot|4 - x| - |2\cdot x + 1| - x = 1$.

ΛΥΣΗ

Όταν οι παραστάσεις που είναι μέσα στο απόλυτο είναι διαφορετικές τις μηδενίζω και φτιάχνω πίνακα για να βρω το πρόσημό τους.

$|4 - x| = 4 - x$, αν $4 - x > 0$ και $|4 - x| = -(4 - x)$ αν $4 - x < 0$.

Μηδενίζω $4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$

$2\cdot x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cdot x = -1$ ο $x = -\frac{1}{2}$.

Φτιάχνω πίνακα

Χ	$-\infty$ $-½$	4	$+\infty$
$4 - x$	+	+	-
$2\cdot x + 1$	–	+	+

Κάνω πράξεις σε κάθε διάστημα χωριστά :

$\rightarrow$ Για $x \leq -\frac{1}{2}$: έχω $\begin{Bmatrix} 4-x \geq 0 \\ 2x+1 < 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} |4-x| = 4-x \\ |2x+1| = -2x-1 \end{Bmatrix}$ και η εξίσωση γίνεται :

$3\cdot(4 - x) - (-2\cdot x - 1) - x = 1 \Leftrightarrow 12 - 3\cdot x + 2\cdot x + 1 - x = 1 \Leftrightarrow -2\cdot x + 13 = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2\cdot x = 1 - 13 \Leftrightarrow -2\cdot x = -12 \Leftrightarrow x = 6$ (απορρίπτεται γιατί πρέπει $x < -1/2$).

$\rightarrow$ Αν $-\frac{1}{4} \leq x \leq 4$ έχω $3\cdot|4 - x| - |2\cdot x + 1| - x = 1 \Leftrightarrow 3\cdot(4 - x) - (2\cdot x + 1) - x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12 - 3\cdot x - 2\cdot x - 1 - x = 1 \Leftrightarrow 11 - 6\cdot x = 1 \Leftrightarrow -6\cdot x = 1 - 11 \Leftrightarrow -6\cdot x = -10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$.

(δεκτή γιατί ανήκει στο $[-1/4, 4]$).

$\rightarrow$ Αν $x \geq 4$ έχω $3\cdot|4 - x| - |2\cdot x + 1| - x = 1 \Leftrightarrow 3(-4 + x) - (2\cdot x + 1) - x = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3\cdot x - 12 - 2\cdot x - 1 - x = 1 \Leftrightarrow 0\cdot x - 13 = 1 \Leftrightarrow 0\cdot x = 14$ (αδύνατη) Άρα τελικά $x = 5/3$.

Σημείωση :
Για να λύσω ανισώσεις με απόλυτα χρησιμοποιώ τους τύπους. Αν $\theta > 0$ τότε
$\rightarrow |x| < \theta \Rightarrow -\theta < x < \theta$
$\rightarrow |x| > \theta \Rightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$.

5). Να λυθεί η ανίσωση $|x| > -3$

ΛΥΣΗ Η ανίσωση $|x| > -3$ ισχύει για κάθε x γιατί $|x| \geq 0$.

6). Να λυθεί η ανίσωση $|x - 7| < -1$.

ΛΥΣΗ
Η ανίσωση $|x - 7| < -1$ είναι αδύνατη γιατί $|x - 7| \geq 0$.

7). Να λυθεί η ανίσωση $|x - 6| < 2$.

ΛΥΣΗ
Χρησιμοποιώ τον τύπο $|x| < \theta \Rightarrow -\theta < x < \theta$, και λύνω ως προς x
$|x - 6| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 6 < 2 \Leftrightarrow -2 + 6 < x - 6 + 6 < 2 + 6 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 4 < x < 8$.

8). Να λυθεί η ανίσωση $|2 \cdot x + 8| > 2$.

ΛΥΣΗ
Χρησιμοποιώ τον τύπο $|x| > \theta \Rightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$ και λύνω ως προς x.
Έχω $|2 \cdot x + 8| > 2 \Rightarrow 2 \cdot x + 8 > 2 \Rightarrow 2 \cdot x + 8 < -2$ και λύνω χωριστά :
$\rightarrow 2 \cdot x + 8 > 2 \cdot x > 2 \Rightarrow 2 \cdot x > -6 \Rightarrow x > -3$ ή
$\rightarrow 2 \cdot x + 8 < -2 \Leftrightarrow 2 \cdot x < -2 - 8 \Rightarrow 2x < -10 \Leftrightarrow x < -5$.