ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Ορισμός
Ταυτότητα σε ένα σύνολο ,καλείται μια μαθηματική πρόταση που χαρακτηρίζεται αληθής για οποιαδήποτε τιμή και αν πάρουν από το σύνολο αυτό , οι παράμετροι που αυτή περιέχει .

Έτσι ταυτότητες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών Ε καλούμε εκείνες τικ μαθηματικές προτάσεις που είναι αληθείς , όποια πραγματική τιμή και αν πάρουν οι παράμετροι που αυτές περιέχουν.

Οι ταυτότητες που έχουμε διδαχθεί στην Γ' Γυμνασίου είναι:
1). $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2$.
2). $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2$.
3). $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta + 2\cdot\beta\cdot\gamma + 2\cdot\gamma\cdot\alpha$.
4). $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\cdot\alpha^2\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta^2 + \beta^3$.
5). $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\cdot\alpha^2\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta^2 - \beta^3$
6). $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
7). $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\cdot\beta + \beta^2)$.
8). $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)\cdot(\alpha^2 - \alpha\cdot\beta + \beta^2)$.
9). $(x + \alpha)\cdot(x+ \beta) = x^2 + (\alpha+ \beta)\cdot x + \alpha\cdot\beta$.
10).$(x - \alpha)\cdot(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)\cdot x + \alpha\cdot\beta$.

Παρατηρήσεις στις ταυτότητες:

1). Αν τις ταυτότητες $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2$ και $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2$.
τις προσθέσουμε κατά μέλη ή τις αφαιρέσουμε , τότε προκύπτουν οι γνωστές ταυτότητες του Legendre, πού η χρήση τους στις ασκήσεις είναι , όπως θα δούμε , μεγάλη . Έχουμε λοιπόν :

$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2$, και $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2$, με κατά μέλη πρόσθεση έχουμε :
$(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2\cdot(\alpha^2 + \beta^2)$.

$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2$ και $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2$ με κατά μέλη αφαίρεση έχουμε :
$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\cdot\alpha\cdot\beta$.

Από την ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\cdot\alpha\cdot\beta$, προκύπτουν δύο ακόμη πολύ χρήσιμες μορφές :
$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\cdot\alpha\cdot\beta$ και $(\alpha +\beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 + 4\cdot\alpha\cdot\beta$.

2). Αν στην ταυτότητα $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta + 2\cdot\beta\cdot\gamma + 2\cdot\gamma\cdot\alpha$ θέσουμε :
α). Όπου β το –β , τότε έχουμε : $(\alpha - \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta - 2\cdot\beta\cdot\gamma + 2\cdot\gamma\cdot\alpha$
β). Όπου γ , το –γ ,αντίστοιχα : $(\alpha + \beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta - 2\cdot\beta\cdot\gamma - 2\cdot\gamma\cdot\alpha$
γ). Και όπου β , το –β και όπου γ , το –γ :
$(\alpha - \beta - \gamma)^2 = (\beta + \gamma - \alpha)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\cdot\beta + 2\cdot\beta\cdot\gamma + 2\cdot\gamma\cdot\alpha$
Αφήνουμε τις αποδείξεις σαν άσκηση.

3). Για την ταυτότητα $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\cdot\alpha^2\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta^2 + \beta^3$:
Έχουμε (γράφοντας πρώτα το δεύτερο μέλος) :
$\alpha^3 + 3\cdot\alpha^2\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta^2 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 \Leftrightarrow \alpha^3 + 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha + \beta) + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha + \beta)$.
Αν εξακολουθήσουμε τις πράξεις τότε θα αποδείξουμε την ταυτότητα
$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)\cdot(\alpha^2 - \alpha\cdot\beta + \beta^2)$ που στην προηγούμενη τάξη αποδεικνύαμε κάνοντας πράξεις

ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος καταλήγουμε στο δεύτερο.
Πράγματι έχουμε : $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)\cdot[(\alpha + \beta)^2 - 3\cdot\alpha\cdot\beta] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)\cdot[\alpha^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2 - 3\cdot\alpha\cdot\beta] \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)\cdot(\alpha^2 - \alpha\cdot\beta + \beta^2)$.

4). Για την ταυτότητα : $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\cdot\alpha^2\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta^2 - \beta^3$, έχουμε αντίστοιχα :
$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta)$, απ' όπου με αντίστοιχες πράξεις καταλήγουμε στην ταυτότητα
$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)\cdot(\alpha^2 + \alpha\cdot\beta + \beta^2)$.

5). Γενικά για κάθε φυσικό $\nu \geq 2$ ισχύει :
$\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha - \beta)\cdot(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\cdot\beta + \alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2 + \cdots + \beta^{\nu-1})$ [ν-οροι]
για κάθε φυσικό περιττό $\nu > 2$, ισχύει :
$\alpha^\nu + \beta^\nu = (\alpha + \beta)\cdot(\alpha^{\nu-1} - \alpha^{\nu-2}\cdot\beta + \alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2 - \cdots + (-1)^{\nu-1}\cdot\beta^{\nu-1}$. [ν-οροι]
για κάθε φυσικό άρτιο, $\nu > 2$, ισχύει :
$\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha + \beta)\cdot(\alpha^{\nu-1} - \alpha^{\nu-2}\cdot\beta + \alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2 - \cdots - \beta^{\nu-1})$. [ν-οροι]

Ταυτότητες στο σύνολο των Πραγματικών Αριθμών (β μέρος)
Θα συμπληρώσουμε τις γνώσεις μας στο κεφάλαιο των ταυτοτήτων που ισχύουν στο σύνολο M , με μερικές από τις πιο βασικές ταυτότητες που ισχύουν στο σύνολο αυτό.

1). Να αποδειχθούν οι ταυτότητες : (Κυκλικές Παραστάσεις)
i). $\alpha\cdot(\beta - \gamma) + \beta\cdot(\gamma - \alpha) + \gamma\cdot(\alpha - \beta) = 0$.
ii). $\alpha^2\cdot(\beta - \gamma) + \beta^2\cdot(\gamma - \alpha) + \gamma^2\cdot(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\gamma - \alpha)$.
iii). $\alpha\cdot(\beta^2 - \gamma^2) + \beta\cdot(\gamma^2 - \alpha^2) + \gamma\cdot(\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\gamma - \alpha)$.
iv). $\alpha^3\cdot(\beta - \gamma) + \beta^3\cdot(\gamma - \alpha) + \gamma^3\cdot(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\gamma - \alpha)\cdot(\alpha + \beta + \gamma)$.
v). $\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta) + \beta\cdot\gamma\cdot(\beta - \gamma) + \gamma\cdot\alpha\cdot(\gamma - \alpha) = -(\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\gamma - \alpha)$.

Αποδείξεις
i). $\alpha\cdot(\beta - \gamma) + \beta\cdot(\gamma - \alpha) + \gamma\cdot(\alpha - \beta) = \alpha\cdot\beta - \alpha\cdot\gamma + \beta\cdot\gamma - \alpha\cdot\beta + \alpha\gamma - \alpha\cdot\beta = 0$.

ii). $\alpha^2\cdot(\beta - \gamma) + \beta^2\cdot(\gamma - \alpha) + \gamma^2\cdot(\alpha - \beta) = \alpha^2\cdot\beta - \alpha^2\cdot\gamma + \beta^2\cdot\gamma - \alpha\cdot\beta^2 + \gamma^2\cdot(\alpha - \beta) =$
$= \alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta) - \gamma\cdot(\alpha^2 - \beta^2) + \gamma^2\cdot(\alpha - \beta) = \alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta) - \gamma\cdot(\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta) + \gamma^2\cdot(\alpha - \beta) =$
$= (\alpha - \beta)\cdot[\ \alpha\cdot(\beta - \gamma) - \gamma\cdot(\beta - \gamma)\ ] = (\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\alpha - \gamma) = -(\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\gamma - \alpha)$.

iii). $\alpha\cdot(\beta^2 - \gamma^2) + \beta\cdot(\gamma^2 - \alpha^2) + \gamma\cdot(\alpha^2 - \beta^2) = \alpha\cdot\beta^2 - \alpha\cdot\gamma^2 + \beta\cdot\gamma^2 - \alpha^2\cdot\beta + \gamma\cdot(\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta) =$
$= -\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta) - \gamma^2\cdot(\alpha - \beta) + \gamma\cdot(\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta) = -\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta) - \gamma^2\cdot(\alpha - \beta) + \gamma\cdot(\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta) =$
$= (\alpha - \beta)\cdot[- \alpha\cdot\beta - \gamma^2 + \gamma\cdot(\alpha + \beta)\ ] = (\alpha - \beta) - \alpha\cdot\beta - \gamma^2 + \alpha\cdot\gamma + \beta\cdot\gamma\ ] =$
$= (\alpha - \beta)\cdot[-\alpha\cdot(\beta - \gamma) + \gamma\cdot(\beta - \gamma)] = (\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\gamma - \alpha)$.

iv). $\alpha^3\cdot(\beta - \gamma) + \beta^3\cdot(\gamma - \alpha) + \gamma^3\cdot(\alpha - \beta) = \alpha^3\cdot\beta - \alpha^3\cdot\gamma + \beta^3\cdot\gamma - \alpha\cdot\beta^3 + \gamma^3\cdot(\alpha - \beta) =$
$= \alpha\cdot\beta\cdot(\ \alpha^2 - \beta^2\ ) - \gamma\cdot(\ \alpha^3 - \beta^3\ ) + \gamma^3\cdot(\alpha - \beta) =$
$= \alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta) - \gamma\cdot(\alpha - \beta)\cdot(\alpha^2 + \alpha\cdot\beta + \beta^2) + \gamma^3\cdot(\alpha - \beta) =$
$= (\alpha - \beta)\cdot[\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha + \beta) - \gamma\cdot(\alpha^2 + \alpha\cdot\beta + \beta^2\ ) + \gamma^3\ ] =$
$= (\alpha - \beta)\cdot[\alpha^2\cdot\beta + \alpha\cdot\beta^2 - \alpha^2\cdot\gamma - \alpha\cdot\beta\cdot\gamma - \beta^2\cdot\gamma + \gamma^3] =$
$= (\alpha - \beta)\cdot[\alpha^2\cdot(\beta - \gamma) + \alpha\cdot\beta\cdot(\beta - \gamma) - \gamma\cdot(\ \beta^2 - \gamma^2\ )] = (\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot[\alpha^2 + \alpha\cdot\beta - \gamma\cdot(\beta + \gamma)] =$
$= (\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot[\ \alpha^2 + \alpha\cdot\beta - \beta\cdot\gamma - \gamma^2\ ] = (\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\alpha - \gamma)\cdot(\gamma + \alpha) - \beta\cdot(\gamma - \alpha)] =$
$= (\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot[-(\gamma - \alpha)\cdot(\gamma + \alpha) - \beta\cdot(\gamma - \alpha)] = -(\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\gamma - \alpha)\cdot((\alpha + \beta + \gamma))$.

v). $\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta) + \beta\cdot\gamma\cdot(\beta - \gamma) + \gamma\cdot\alpha\cdot(\gamma - \alpha) = \alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta) + \beta^2\cdot\gamma - \beta\cdot\gamma^2 + \alpha\cdot\gamma^2 - \alpha^2\cdot\gamma =$
$= \alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta) - \gamma\cdot(\alpha^2 - \beta^2\ ) + \gamma^2\cdot(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)\cdot\alpha\cdot\beta - \gamma\cdot(\alpha + \beta\ ) + \gamma^2\ ] =$

$= (\alpha - \beta)\cdot\alpha\cdot\beta - \alpha\cdot\gamma - \beta\cdot\gamma + \gamma^2\ ] = (\alpha - \beta)\cdot[\ \alpha\cdot(\beta - \gamma) - \gamma\cdot(\beta - \gamma)\ ] =$
$= (\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\ \alpha - \gamma\ ) = -(\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\gamma - \alpha).$

2). Να αποδειχθεί η ταυτότητα :

$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\cdot(\alpha + \beta)\cdot(\beta + \gamma)\cdot(\gamma + \alpha\ ) =$
$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha^2\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta^2 + 3\cdot\beta^2\cdot\gamma + 3\cdot\beta\cdot\gamma^2 + 3\cdot\gamma^2\cdot\alpha + 3\cdot\gamma\cdot\alpha^2 + 6\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma.$

Απόδειξη

$(\alpha + \beta + \gamma\ )^3 =[(\ \alpha + \beta) + \gamma\ ]^3 =(\ \alpha + \beta\ )^3 + \gamma^3 + 3\ (\alpha + \beta\ )\gamma\ [(\alpha + \beta) + \gamma\ ] =$
$= \alpha^3 + \beta^3 + 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha + \beta\ ) + \gamma^3 + 3\cdot\gamma\cdot(\ \alpha + \beta)\cdot(\ \alpha + \beta + \gamma) =$
$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 +3\cdot(\alpha + \beta)\cdot[\alpha\cdot\beta + \gamma\cdot(\alpha + \beta + \gamma)) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 +3\cdot(\alpha + \beta)\cdot[\alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma + \beta\cdot\gamma + \gamma^2] =$
$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\cdot(\alpha + \beta)\cdot[\beta\cdot(\gamma + \alpha) + \gamma\cdot(\gamma + \alpha)] = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\cdot(\alpha + \beta)\cdot(\beta + \gamma)\cdot(\gamma + \alpha).$

3). Να αποδειχθούν οι ταυτότητες :

i). $(x - \alpha)\cdot(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)\cdot x + \alpha\cdot\beta.$
ii).$(x - \alpha)\cdot(x - \beta)\cdot(x - \gamma) = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)\cdot x + (\alpha\cdot\beta + \beta\cdot\gamma + \gamma\cdot\alpha)\cdot x^2 - \alpha\cdot\beta\cdot\gamma$

Απόδειξη

i). $(x - \alpha)\cdot(x - \beta) = x^2 - \alpha\cdot x - \beta\cdot x + \alpha\cdot\beta = x^2 - (\alpha + \beta)\cdot x + \alpha\cdot\beta.$
ii). $(x - \alpha)\cdot(x - \beta)\cdot(x - \gamma) = [x^2 - (\alpha + \beta)\cdot x + \alpha\cdot\beta]\cdot(x - \gamma) =$
$= x^3 - \gamma\cdot x^2 - (\alpha + \beta)\cdot x^2 + \gamma\cdot(\alpha + \beta)\cdot x + \alpha\cdot\beta\cdot x - \alpha\cdot\beta\cdot\gamma =$
$= x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)\cdot x^2 + (\alpha\cdot\beta + \beta\cdot\gamma + \gamma\cdot\alpha)\cdot x - \alpha\cdot\beta\cdot\gamma.$

4). Το διώνυμο του Newton και το τρίγωνο του Paskal

$$(\alpha + \beta\ )^\nu = \alpha^\nu + \nu\cdot\alpha^{\nu-1}\cdot\beta + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\cdot\alpha^{\nu-2}\cdot\beta^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^3 + \cdots + \beta^\nu.$$

Για το ανάπτυγμα του διωνύμου του Newton ισχύουν τα εξής :

→ Αναπτύσσεται σε ν + 1 μονώνυμα ομογενή, βαθμού ν.
→ Για τον συντελεστή του κάθε μονωνύμου , πολλαπλασιάζουμε τον συντελεστή του προηγούμενου μονωνύμου με τον βαθμό του α και διαιρούμε με την θέση του μονωνύμου στο ανάπτυγμα ,που είναι γραμμένο κατά τις κατιούσες δυνάμεις του α
→ Οι συντελεστές των μονωνύμων που ισαπέχουν των ακραίων , είναι ίσοι .

Τρίγωνο του Paskal

$\alpha + \beta$	1 1
$(\alpha + \beta\ )^2$	1 2 1
$(\alpha + \beta\ )^3$	1 3 3 1
$(\alpha + \beta\ )^4$	1 4 6 4 1
$(\alpha + \beta\ )^5$	1 5 10 10 5 1
κ.λ.π	

Δηλαδή $(\alpha + \beta)^5 = \alpha^5 + 5\cdot\alpha^4\cdot\beta + 10\cdot\alpha^3\cdot\beta^2 + 10\cdot\alpha^2\cdot\beta^3 + 5\cdot\alpha\cdot\beta^4 + \beta^5$

5). Να αποδειχθεί η ταυτότητα :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\cdot\beta - \beta\cdot\gamma - \gamma\cdot\alpha = \frac{1}{2}\cdot(\alpha + \beta + \gamma)\cdot[(\alpha - \beta\ )^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2].$$

Απόδειξη

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\cdot\beta - \beta\cdot\gamma - \gamma\cdot\alpha = \frac{1}{2}\cdot[2\cdot\alpha^2 + 2\cdot\beta^2 + 2\cdot\gamma^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta - 2\cdot\beta\cdot\gamma - 2\cdot\gamma\cdot\alpha] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[\alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2 + \beta^2 - 2\cdot\beta\cdot\gamma + \gamma^2 + \gamma^2 - 2\cdot\gamma\cdot\alpha + \alpha^2] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$$

6). Να αποδειχθεί η ταυτότητα : (Cauchy – Euler)

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)\cdot(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\cdot\beta - \beta\cdot\gamma - \gamma\cdot\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(\alpha + \beta + \gamma)\cdot[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2].$$

Απόδειξη

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = (\alpha + \beta)^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha + \beta) + \gamma^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma =$

$= (\alpha + \beta)^3 + \gamma^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha + \beta + \gamma) = [(\alpha + \beta) + \gamma]^3 - 3\cdot[(\alpha + \beta) + \gamma]\cdot(\alpha + \beta)\cdot\gamma - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha + \beta + \gamma) =$

$= (\alpha + \beta + \gamma)^3 - 3\cdot(\alpha + \beta + \gamma)\cdot(\alpha + \beta)\cdot\gamma - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha + \beta + \gamma) =$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\cdot[(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3\cdot(\alpha + \beta)\cdot\gamma - 3\cdot\alpha\cdot\beta] =$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\cdot[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta + 2\cdot\beta\cdot\gamma + 2\cdot\gamma\cdot\alpha - 3\cdot\alpha\cdot\gamma - 3\cdot\beta\cdot\gamma - 3\cdot\alpha\cdot\beta] =$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\cdot[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\cdot\beta - \beta\cdot\gamma - \gamma\cdot\alpha] =$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\cdot\frac{1}{2}\cdot[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] = 2\cdot(\alpha + \beta + \gamma)\cdot[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2].$

7). Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$,τότε να αποδειχθεί ότι ισχύει : $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\cdot\alpha\cdot\beta\gamma$.
(Σχόλιο : Προφανώς ισχύει η αποδεικτέα αν $\alpha = \beta = \gamma$).

Απόδειξη

<u>α′ τρόπος</u>

Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$,τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = 0$.

Όμως $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = \frac{1}{2}\cdot(\alpha + \beta + \gamma)\cdot[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] = 0$, αφού $\alpha + \beta + \gamma = 0$,

άρα προφανώς ισχύει η ζητούμενη σχέση.

<u>β′ τρόπος</u>

Ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = 0$, άρα $(\alpha + \beta + \gamma)^3 = 0$,

όμως : $(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\cdot(\alpha + \beta)\cdot(\beta + \gamma)\cdot(\gamma + \alpha)$

Άρα $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\cdot(\alpha + \beta)\cdot(\beta + \gamma)\cdot(\gamma + \alpha) = 0$.

Από $\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha + \beta = -\gamma \\ \beta + \gamma = -\alpha \\ \gamma + \alpha = -\beta \end{matrix}\right\}$.

Άρα $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(-\gamma)\cdot(-\alpha)\cdot(-\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$.

<u>γ′ τρόπος (σχολικού βιβλίου:</u>

$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -\gamma \Rightarrow (\alpha + \beta)^3 = (-\gamma)^3 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + 3\cdot\alpha\cdot\beta(\alpha + \beta) = -\gamma^3$,

αλλά $\alpha + \beta = -\gamma$

$\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\cdot\alpha\cdot\beta(-\gamma) = 0 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = 0 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$.

8). Αν ισχύει $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$, τότε να αποδείξετε ότι : $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$.

Απόδειξη

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$, άρα $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = 0$,άρα
$2\cdot(\alpha + \beta + \gamma)\cdot[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] = 0$,απ' όπου
$\alpha + \beta + \gamma = 0$ ή $[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] = 0$, άρα $(\alpha - \beta) = (\beta - \gamma) = (\gamma - \alpha) = 0$,
δηλαδή $\alpha = \beta = \gamma$.

9). Ταυτότητα Lagrange για τέσσερις και έξη αριθμούς Να αποδειχθεί ότι ισχύει :

i). $(\alpha^2 + \beta^2)\cdot(x^2 + y^2) - (\alpha\cdot x + \beta\cdot y)^2 = (\alpha\cdot y - \beta\cdot x)^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{vmatrix}^2$.

ii). $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\cdot(x^2 + y^2 + \omega^2) - (\alpha\cdot x + \beta\cdot y + \gamma\cdot\omega)^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ y & \omega \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \omega & x \end{vmatrix}^2$.

Σχόλιο: Θα μάθουμε στο 3ο Κεφάλαιο ότι ορίζουσα των α, β, γ, δ συμβολίζεται και καλείται η παράσταση $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$.

Απόδειξη

i).$(\alpha^2 + \beta^2)\cdot(x^2 + y^2) - (\alpha\cdot x + \beta\cdot y)^2 = \alpha^2\cdot x^2 + \alpha^2\cdot y^2 + \beta^2\cdot x^2 + \beta^2\cdot y^2 - (\alpha^2\cdot x^2 + \beta^2\cdot y^2 + 2\cdot\alpha\cdot x\cdot\beta\cdot y) =$
$= \alpha^2\cdot x^2 + \alpha^2\cdot y^2 + \beta^2\cdot x^2 + \beta^2\cdot y^2 - \alpha^2\cdot x^2 - \beta^2\cdot y^2 - 2\cdot\alpha\cdot x\cdot\beta\cdot y = \alpha^2\cdot y^2 + \beta^2\cdot x^2 - 2\cdot\alpha\cdot y\cdot\beta\cdot x =$
$= (\alpha\cdot y - \beta\cdot x)^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{vmatrix}^2$.

ii).$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\cdot(x^2 + y^2 + \omega^2) - (\alpha\cdot x + \beta\cdot y + \gamma\cdot\omega)^2 =$
$= \alpha^2\cdot x^2 + \alpha^2\cdot y^2 + \alpha^2\cdot\omega^2 + \beta^2\cdot x^2 + \beta^2\cdot y^2 + \beta^2\cdot\omega^2 + \gamma^2\cdot x^2 + \gamma^2\cdot y^2 + \gamma^2\cdot\omega^2 -$
$- (\alpha^2\cdot x^2 + \beta^2\cdot y^2\cdot\gamma^2\cdot\omega^2 + 2\cdot\alpha\cdot x\cdot\beta\cdot y + 2\cdot\beta\cdot y\cdot\gamma\cdot\omega + 2\cdot\gamma\cdot\omega\cdot\alpha\cdot x) =$
$= \alpha^2\cdot y^2 + \alpha^2\cdot\omega^2 + \beta^2\cdot x^2 + \beta^2\cdot\omega^2 + \gamma^2\cdot x^2 + \gamma^2\cdot y^2 - 2\cdot\alpha\cdot x\cdot\beta\cdot y - 2\cdot\beta\cdot y\cdot\gamma\cdot\omega - 2\cdot\gamma\cdot\omega\cdot\alpha\cdot x =$
$= (\alpha\cdot y - \beta\cdot x)^2 + (\beta\cdot\omega - \gamma\cdot y)^2 + (\gamma\cdot x - \alpha\cdot\omega)^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ y & \omega \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \omega & x \end{vmatrix}^2$.

10. Ταυτότητα De Moivre Να αποδειχθεί ότι ισχύει :
$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2 - 2\cdot\beta^2\cdot\gamma^2 - 2\cdot\gamma^2\cdot\alpha^2 = (\alpha + \beta + \gamma)\cdot(\alpha - \beta - \gamma)\cdot(\alpha + \beta - \gamma)\cdot(\alpha - \beta - \gamma)$.

Απόδειξη

$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2 - 2\cdot\beta^2\cdot\gamma^2 - 2\cdot\gamma^2\cdot\alpha^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 - \gamma^2\cdot(2\cdot\beta^2 + 2\cdot\alpha^2) =$
$= (\alpha - \beta)^2\cdot(\alpha + \beta)^2 + \gamma^4 - \gamma^2\cdot[(\alpha + \beta)^2 +(\alpha - \beta)^2] =$
$= (\alpha - \beta)^2\cdot(\alpha + \beta)^2 + \gamma^4 - \gamma^2\cdot(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2\cdot(\alpha - \beta)^2 =$
$= (\alpha + \beta)^2\cdot[(\alpha - \beta)^2 - \gamma^2] - \gamma^2\cdot[(\alpha - \beta)^2 - \gamma^2] = [(\alpha - \beta)^2 - \gamma^2]\cdot[(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2] =$
$= (\alpha - \beta + \gamma)\cdot(\alpha - \beta - \gamma)\cdot(\alpha + \beta + \gamma)\cdot(\alpha + \beta - \gamma)$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1

Να αποδειχθεί ότι ισχύει : $(\alpha^2+\beta^2)^2-(2\cdot\alpha\cdot\beta)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2$.

Απόδειξη

$(\alpha^2+\beta^2)^2-(2\cdot\alpha\cdot\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-4\cdot\alpha^2\cdot\beta^2=\alpha^4+2\alpha^2\cdot\beta^2+\beta^4-4\cdot\alpha^2\cdot\beta^2=\alpha^4-2\alpha^2\cdot\beta^2+\beta^4=(\alpha^2-\beta^2)^2$

Εάν κάνουμε χρήση της ταυτότητος $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\cdot\alpha\cdot\beta$ τότε το συμπέρασμα εύκολα προκύπτει αν θέσουμε αντί α το α^2 και αντί β το β^2 .

Παράδειγμα 2

Να αποδειχθεί ότι ισχύει : $x^3=\left(\frac{x\cdot(x+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{x\cdot(x-1)}{2}\right)^2$.

Απόδειξη

$$\left(\frac{x\cdot(x+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{x\cdot(x-1)}{2}\right)^2=x^3=\frac{x^2}{4}\cdot(x+1)^2-\frac{x^2}{4}\cdot(x-1)^2=\frac{x^2}{4}\cdot\left[(x+1)^2-(x-1)^2\right]=\frac{x^2}{4}\cdot4x=x^3$$

(Κάναμε χρήση της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\cdot\alpha\cdot\beta$ θέτοντες όπου α το x και όπου β το 1)

Να αποδειχθεί ότι :

$(\alpha+\beta)^3\,(\alpha-\beta)-(\alpha^4-\beta^4)=2\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)$

Παράδειγμα 3

Να αποδειχθεί ότι : $(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)-(\alpha^4-\beta^4)=2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha^2-\beta^2)$.

Απόδειξη

$(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)-(\alpha^4-\beta^4)=(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)-(\alpha^2-\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)=$

$=(\alpha+\beta)^2\,(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha^2-\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)=[(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)](\alpha^2-\beta^2)=$

$=[(\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)]\cdot(\alpha^2-\beta^2)=2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha^2-\beta^2)$.

Παράδειγμα 4

Να αποδειχθεί ότι :

$2\cdot(\gamma-\beta)\cdot(\gamma-\alpha)+2\cdot(\beta-\alpha)\cdot(\beta-\gamma)+2\cdot(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\gamma)=(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$.

Απόδειξη

Ισχύει :

$(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)=0$, άρα :

$[(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)]^2=0$

$\Leftrightarrow[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+2\cdot(\alpha-\beta)\cdot(\beta-\gamma)+2\cdot(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)+2\cdot(\gamma-\alpha)\cdot(\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=-2\cdot(\alpha-\beta)\cdot(\beta-\gamma)-2\cdot(\beta-\gamma)\cdot(\gamma-\alpha)-2\cdot(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=2\cdot(\beta-\alpha)\cdot(\beta-\gamma)+2\cdot(\gamma-\beta)\cdot(\gamma-\alpha)+2\cdot(\alpha-\gamma)\cdot(\alpha-\beta)$.

(Κάναμε χρήση της ταυτότητας $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+2\cdot\beta\cdot\gamma+2\cdot\gamma\cdot\alpha$.

θέτοντες όπου α το $\alpha-\beta$,β το $\beta-\gamma$ και γ το $\gamma-\alpha$)

Παράδειγμα 5

Να αποδειχθεί ότι : $4\cdot\gamma\cdot(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta-\gamma)^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2$.

Απόδειξη

Εφαρμογή της ταυτότητος : $(\alpha-\beta)^2+4\cdot\alpha\cdot\beta=(\alpha+\beta)^2$, θέτοντες όπου α το $\alpha+\beta$ και όπου β το γ.

Εάν θέλουμε να δώσουμε απόδειξη χωρίς να βασισθούμε στην παραπάνω ταυτότητα τότε μπορούμε να γράψουμε :

$4\cdot\gamma\cdot(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta-\gamma)^2=4\cdot\gamma\cdot(\alpha+\beta)+[(\alpha+\beta)-\gamma]^2=4\cdot\gamma\cdot(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\cdot(\alpha+\beta)\cdot\gamma+\gamma^2=$

$= (\alpha + \beta)^2 + 2\cdot(\alpha + \beta)\cdot\gamma + \gamma^2 = [(\alpha + \beta) + \gamma\ ]^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2$.
Η απόδειξη όμως αυτή δείχνει ότι ο λύτης έχει υπ' όψιν του την ταυτότητα
$(\alpha - \beta)^2 + 4\cdot\alpha\cdot\beta = (\alpha + \beta)^2$.
Μια άλλη απόδειξη ανεξάρτητη από τις δύο προηγούμενες είναι :
$4\cdot\gamma\cdot(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta - \gamma)^2 = 4\cdot\gamma\cdot\alpha + 4\cdot\beta\cdot\gamma + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta - 2\cdot\beta\cdot\gamma - 2\cdot\gamma\cdot\alpha =$
$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta + 2\cdot\beta\cdot\gamma + 2\cdot\gamma\cdot\alpha = (\alpha + \beta + \gamma)^2$.

Παράδειγμα 6
Να αποδειχθεί : $\alpha\cdot(\alpha - 2\cdot\beta)^3 - \beta\cdot(\beta - 2\cdot\alpha)^3 = (\alpha^2 - \beta^2)\cdot(\alpha + \beta)^2$.
Απόδειξη
$\alpha\cdot(\alpha - 2\cdot\beta)^3 - \beta\cdot(\beta - 2\cdot\alpha)^3 = \alpha\cdot[(\alpha - 2\cdot\beta) - \beta\ ]^3 + \beta\cdot(2\cdot\alpha - \beta)^3 =$
(θα κάνουμε χρήση της ταυτότητος $(x - y)^3 = x^3 - y^3 + 3\cdot x\cdot y\cdot(x + y)$)
$\alpha\cdot[(\alpha - \beta)^3 - \beta^3 + 3\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta)\cdot[(\alpha - \beta) - \beta]] + \beta\cdot[(\alpha - \beta)^3 + \alpha^3 + 3\cdot\alpha\cdot(\alpha - \beta)\cdot[(\alpha - \beta) + \alpha]] =$
$= \alpha\cdot(\alpha - \beta)^3 - \alpha\cdot\beta^3 + 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta)\cdot(\alpha - 2\cdot\beta) + \beta\cdot(\alpha - \beta)^3 + \alpha^3\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta)\cdot(2\cdot\alpha - \beta) =$
$= (\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta) + \alpha\cdot\beta\cdot(\alpha^2 - \beta^2) + 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta)\cdot[(\alpha - 2\cdot\beta) + (2\cdot\alpha - \beta)] =$
$= (\ \alpha - \beta)^2\cdot(\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta) + \alpha\cdot\beta\cdot(\alpha^2 - \beta^2) + 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta) =$
$= (\ \alpha - \beta\ )^2\cdot(\alpha^2 - \beta^2) + \alpha\cdot\beta\cdot(\ \alpha^2 - \beta^2) + 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\ \alpha^2 - \beta^2\ ) = (\alpha^2 - \beta^2)\cdot[(\alpha - \beta\ )^2 + \alpha\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta] =$
$= (\ \alpha^2 - \beta^2)\cdot[(\ \alpha - \beta\ )^2 + 4\alpha\beta\ ] = (\alpha^2 - \beta^2)\cdot(\alpha + \beta\ )^2$.

Παράδειγμα 7

Να αποδειχθεί : $(\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta)\cdot(\beta^2 + \alpha^2) - (\alpha^2 - \beta^2\ )^2 = 2\cdot\beta\cdot[\alpha^2\cdot(\alpha + \beta) - (\alpha^3 + \beta^3\ )]$.

Απόδειξη
Θα αποδείξουμε ότι το α' μέλος καθώς και το β' μέλος απλοποιούμενα καταλήγουν στην ίδια ακριβώς παράσταση . Πράγματι , έχουμε : α' μέλος :
$(\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta)\cdot(\ \beta^2 + \alpha^2) - (\alpha^2 - \beta^2\ )^2 = (\alpha^2 - \beta^2)\cdot(\ \beta^2 + \alpha^2) - (\ \alpha^2 - \beta^2\ )^2 =$
$= (\alpha^2 - \beta^2)\cdot[(\ \alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 - \beta^2)] = (\alpha^2 - \beta^2)\cdot(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 + \beta^2\ ) = 2\cdot\beta^2\cdot(\alpha^2 - \beta^2)$.

β′ μέλος :
$2\cdot\beta\cdot[\alpha^2\cdot(\alpha + \beta) - (\alpha^3 + \beta^3)] = 2\cdot\beta\cdot[\alpha^3 + \alpha^2\cdot\beta - \alpha^3 - \beta^3] = 2\cdot\beta\cdot(\alpha^2\cdot\beta - \beta^3\ ) = 2\cdot\beta^2\cdot(\alpha^2 - \beta^2)$.
Πιο δύσκολο είναι να ξεκινήσουμε από το ένα μέλος και να καταλήξουμε στο άλλο χρησιμοποιώντας ισότητες . Φυσικά αυτός ο τρόπος , αν και δυσκολότερος είναι «μαθηματικότερος» του πρώτου άρα προτιμητέος και αυτό γιατί με τον πρώτο τρόπο απλώς διαπιστώνουμε ότι αληθεύει κάτι που κάποιος άλλος βρήκε ότι ισχύει , ενώ με τον δεύτερο τρόπο ανακαλύπτουμε ξανά τις σκέψεις που έκανε ο κατασκευαστής της άσκησης ώστε να καταλήξει στο δεύτερο μέλος και έτσι να προτείνει στον λύτη την απόδειξη της ισότητας . Έχουμε λοιπόν :
$(\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta)\cdot(\beta^2 + \alpha^2) - (\alpha^2 - \beta^2)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)\cdot(\ \beta^2 + \alpha^2) - (\alpha^2 - \beta^2)^2 =$
$= (\alpha^4 - \beta^4) - (\alpha^4 + \beta^4 - 2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2\ ) = \alpha^4 - \beta^4 - \alpha^4 - \beta^4 + 2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2 = 2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2 - 2\cdot\beta^4 =$
$= 2\cdot\beta\cdot(\alpha^2\cdot\beta - \beta^3) = 2\cdot\beta\cdot(\alpha^3 + \alpha^2\cdot\beta - \alpha^3 - \beta^3\ ) = 2\cdot\beta\cdot[\alpha\cdot(\alpha + \beta) - (\alpha^3 + \beta^3)]$.
Παρατήρησε ότι στο έκτο βήμα βγάζουμε κοινό παράγοντα όχι το 2β άλλα το 2β , δηλαδή εκείνο που μας ενδιαφέρει να εμφανισθεί , καθώς επίσης στο έβδομο βήμα προσθαφαιρώ το α ώστε να εμφανισθεί σαν όρος στην αγκύλη.

Παράδειγμα 8

Να αποδειχθεί ότι : $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+1\right)^2 - \left(\dfrac{\beta}{\alpha}+1\right)^2 = \dfrac{(\alpha+\beta)^3\cdot(\alpha-\beta)}{\alpha^2\cdot\beta^2}$.

Απόδειξη

$$\frac{(\alpha+\beta)^3\cdot(\alpha-\beta)}{\alpha^2\cdot\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)}{\alpha^2\cdot\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2\cdot\beta^2}=(\alpha+\beta)^2\cdot\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2\cdot\beta^2}=$$

$$=(\alpha+\beta)^2\cdot\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2\cdot\beta^2}-\frac{\beta^2}{\alpha^2\cdot\beta^2}\right)=(\alpha+\beta)^2\cdot\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)=(\alpha+\beta)^2\cdot\frac{1}{\beta^2}-(\alpha+\beta)^2\cdot\frac{1}{\alpha^2}=$$

$$=\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)^2-\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2.$$

Παράδειγμα 9

Να δειχθεί η ταυτότητα : $\alpha^2\cdot\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta)^2=(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)^2$.

Απόδειξη

$\alpha^2\cdot\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2+2\cdot\alpha\cdot\beta)=\alpha^2\cdot\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)^2+2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha^2+\beta^2)=$

$=(\alpha^2+\beta^2)^2+2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)^2$.

Να αποδειχθεί ότι :

$\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)+\beta^4=(\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)^2$

Παράδειγμα 10

Να αποδειχθεί ότι : $\alpha\cdot(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+2\cdot\beta)\cdot(\alpha+3\cdot\beta)+\beta^4=(\alpha^2+3\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2)^2$.

Απόδειξη

$\alpha\cdot(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+2\cdot\beta)\cdot(\alpha+3\cdot\beta)+\beta^4=(\alpha^2+\alpha\cdot\beta)(\alpha^2+5\cdot\alpha\cdot\beta+6\cdot\beta^2)+\beta^4=$

$=\alpha^4+5\alpha^3\cdot\beta+6\cdot\alpha^2\cdot\beta^2+\alpha^3\cdot\beta+5\cdot\alpha^2\cdot\beta^2+6\cdot\alpha\cdot\beta^3+\beta^4=\alpha^4+\beta^4+2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2+6\cdot\alpha^3\cdot\beta+6\cdot\alpha\cdot\beta^3+9\cdot\alpha^2\cdot\beta^2=$

$=(\alpha^2+\beta^2)^2+6\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha^2+\beta^2)+9\cdot\alpha^2\cdot\beta^2=[(\alpha^2+\beta^2)+3\cdot\alpha\cdot\beta]^2=(\alpha^2+3\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2)^2$.

Παράδειγμα 11

Να αποδειχθεί η ταυτότητα :

$\alpha^4+\beta^4+(\alpha+\beta)^4=2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2+2\cdot(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta)^2=2\cdot(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)^2$.

Απόδειξη

$\alpha^4+\beta^4+(\alpha+\beta)^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2+(\alpha^2+\beta^2+2\cdot\alpha\cdot\beta)^2=$

$=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)^2+4\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha^2+\beta^2)+4\cdot\alpha^2\cdot\beta^2=$

$=2\cdot(\alpha^2+\beta^2)^2+4\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha^2\cdot\beta^2=2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2+2\cdot(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta)^2$.

$\alpha^4+\beta^4+2\alpha+\beta)^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2+(\alpha^2+\beta^2+2\cdot\alpha\cdot\beta)^2=$

$=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)^2+4\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha^2+\beta^2)+4\cdot\alpha^2\cdot\beta^2=$

$=2\cdot(\alpha^2+\beta^2)^2+4\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha^2+\beta^2)+2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2=2\cdot[(\alpha^2+\beta^2)^2+2\cdot\alpha\cdot\beta](\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\cdot\beta^2]=$

$=2\cdot[(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\cdot\beta]^2=2\cdot(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)^2$.

Παράδειγμα 12

Να δειχθεί η ταυτότητα :

$\alpha\cdot(\beta+\gamma)^2+\beta\cdot(\gamma+\alpha)^2+\gamma\cdot(\alpha+\beta)^2-4\cdot\alpha\cdot\beta=(\alpha+\beta)\cdot(\beta+\gamma)\cdot(\gamma+\alpha)$.

Απόδειξη

$\alpha\cdot(\beta+\gamma)^2+\beta\cdot(\gamma+\alpha)^2+\gamma\cdot(\alpha+\beta)^2-4\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=$

$=\gamma\cdot(\alpha+\beta)^2+\alpha\cdot(\beta^2+\gamma^2+2\cdot\beta\cdot\gamma)+\beta\cdot(\alpha^2+\gamma^2+2\cdot\alpha\cdot\gamma)-4\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=$

$=\gamma\cdot(\alpha+\beta)^2+\alpha\cdot\beta^2+\alpha\cdot\gamma^2+2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma+\alpha^2\cdot\beta+\beta\cdot\gamma^2+2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma-4\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=$

$=\gamma\cdot(\alpha+\beta)^2+\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta)+\gamma^2\cdot(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)\cdot[\gamma\cdot(\alpha+\beta)+\alpha\cdot\beta+\gamma^2]=$

$=(\alpha+\beta)(\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta+\gamma^2)=(\alpha+\beta)\cdot[\gamma\cdot(\gamma+\alpha)+\beta\cdot(\gamma+\alpha)]=(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\alpha)\cdot(\beta+\gamma)$.

Παράδειγμα 13

Να δειχθεί η ταυτότητα :
$(x-\alpha)^2\cdot(\beta-\gamma)+(x-\beta)^2\cdot(\gamma-\alpha)+(x-\gamma)^2\cdot(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)\cdot(\beta-\gamma)\cdot(\gamma-\alpha)$.

Απόδειξη

$(x-\alpha)^2\cdot(\beta-\gamma)+(x-\beta)^2\cdot(\gamma-\alpha)+(x-\gamma)^2\cdot(\alpha-\beta)=$
$=(x-\alpha)^2\cdot(\beta-\gamma)+(x^2-2\cdot\beta\cdot x+\beta^2)\cdot(\gamma-\alpha)+(x^2-2\cdot\gamma\cdot x+\gamma^2)\cdot(\alpha-\beta)=$
$=(x-\alpha)^2\cdot(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)\cdot x^2-2\cdot\beta\cdot x\cdot(\gamma-\alpha)+\beta^2\cdot\gamma-\alpha\cdot\beta^2+(\alpha-\beta)\cdot x^2-2\cdot\gamma\cdot x\cdot(\alpha-\beta)+\alpha\cdot\gamma^2-\beta\cdot\gamma^2=$
$=(x-\alpha)^2\cdot(\beta-\gamma)+[(\gamma-\alpha)+(\alpha-\beta)]\cdot x^2-2\cdot x\cdot[\beta\cdot(\gamma-\alpha)+\gamma\cdot(\alpha-\beta)]+\beta\cdot\gamma\cdot(\beta-\gamma)-\alpha\cdot(\beta^2-\gamma^2)=$
$=(x-\alpha)\cdot(\beta-\gamma)-(\beta-\gamma)\cdot x^2-2\cdot x\cdot(\beta\cdot\gamma-\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma-\beta\cdot\gamma)+\beta\cdot\gamma\cdot(\beta-\gamma)-\alpha\cdot(\beta+\gamma)\cdot(\beta-\gamma)=$
$=(x-\alpha)\cdot(\beta-\gamma)-(\beta-\gamma)\cdot x^2+2\cdot x\cdot\alpha\cdot(\beta-\gamma)-\alpha^2\cdot(\beta-\gamma)+\alpha^2\cdot(\beta-\gamma)+$
$+\beta\cdot\gamma\cdot(\beta-\gamma)-\alpha\cdot(\beta+\gamma)\cdot(\beta-\gamma)=$
$=(x-\alpha)^2\cdot(\beta-\gamma)-(\beta-\gamma)\cdot(x^2-2\cdot\alpha\cdot x+\alpha^2)+\alpha^2\cdot(\beta-\gamma)+\beta\cdot\gamma\cdot(\beta-\gamma)-\alpha\cdot(\beta+\gamma)\cdot(\beta-\gamma)=$
$=\alpha^2\cdot(\beta-\gamma)+\beta\cdot\gamma\cdot(\beta-\gamma)-\alpha\cdot(\beta+\gamma)\cdot(\beta-\gamma)=(\beta-\gamma)\cdot[\alpha^2+\beta\cdot\gamma-\alpha\cdot(\beta+\gamma)]=$
$=(\beta-\gamma)\cdot\alpha^2+\beta\cdot\gamma-\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma=(\beta-\gamma)\cdot[\alpha\cdot(\alpha-\beta)-\gamma\cdot(\alpha-\beta)]=((\alpha-\beta)\cdot((\beta-\gamma))\cdot(\alpha-\gamma)$.

Παράδειγμα 13

Να δειχθεί η ταυτότητα :
$\alpha^2\cdot(\beta+\gamma)+\beta^2\cdot(\gamma+\alpha)+\gamma^2\cdot(\alpha+\beta)+3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)$.

Απόδειξη

$\alpha^2\cdot(\beta+\gamma)+\beta^2\cdot(\gamma+\alpha)+\gamma^2\cdot(\alpha+\beta)+3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=$
$=\alpha^2\cdot\beta+\alpha^2\cdot\gamma+\beta^2\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta^2+\alpha\cdot\gamma^2+\beta\cdot\gamma\text{-}^2+\alpha\cdot\beta\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=$
$=\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\cdot\gamma\cdot(\alpha+\beta+\gamma)+\beta\cdot\gamma\cdot(\alpha+\beta+\gamma)=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)$.

Παράδειγμα 14

Να δειχθεί η ταυτότητα : $(\alpha+\beta)^4+\alpha^4+\beta^4=2\cdot(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)^2$.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι : $2\cdot(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)^2-\alpha^4-\beta^4=(\alpha+\beta)^4$
Πράγματι , έχουμε :
$2\cdot(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)^2-\alpha^4-\beta^4=(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)^2-\alpha^4+(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)^2-\beta^4=$
$=(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2-\alpha^2)\cdot(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2+\alpha^2)+(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2-\beta^2)\cdot(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2+\beta^2)=$
$=(\alpha\cdot\beta+\beta^2)\cdot[\alpha\cdot(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)]+(\alpha^2+\alpha\cdot\beta)\cdot[\beta\cdot(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)]=$
$=\beta\cdot(\alpha+\beta)\cdot[\alpha\cdot(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)]+\alpha\cdot(\alpha+\beta)\cdot[\beta\cdot(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)]=$
$=\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta)^2+\beta\cdot(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta)^2+\alpha\cdot(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)^2=$
$=2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2\cdot[(\alpha^2+\beta^2)+2\cdot\alpha\cdot\beta]=$
$=(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)^4$.

Ταυτότητες που περιέχουν την ποσότητα $\tau=\dfrac{1}{2}\cdot(\alpha+\beta+\gamma)$.

Παράδειγμα 15

Να δειχθεί ότι :
$2\cdot(\tau-\alpha)\cdot(\tau-\beta)\cdot(\tau-\gamma)+\alpha\cdot(\tau-\beta)\cdot(\tau-\gamma)+\beta\cdot(\tau-\alpha)\cdot(\tau-\gamma)+\gamma\cdot(\tau-\alpha)\cdot(\tau-\beta)=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$.

Απόδειξη

$2\cdot(\tau-\alpha)\cdot(\tau-\beta)\cdot(\tau-\gamma)+\alpha\cdot(\tau-\beta)\cdot(\tau-\gamma)+\beta\cdot(\tau-\alpha)\cdot(\tau-\gamma)+\gamma\cdot(\tau-\alpha)\cdot(\tau-\beta)=$
$=(\tau-\beta)\cdot(\tau-\gamma)\cdot[2\cdot(\tau-\alpha)+\alpha]+(\tau-\alpha)\cdot[\beta\cdot(\tau-\gamma)+\gamma\cdot(\tau-\beta)]=$
$=(\tau-\beta)\cdot(\tau-\gamma)\cdot(2\cdot\tau-2\cdot\alpha+\alpha)+(\tau-\alpha)\cdot(\beta\cdot\tau-\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\tau-\beta\cdot\gamma)=$
$=(\tau-\beta)\cdot(\tau-\gamma)\cdot(2\cdot\tau-\alpha)+(\tau-\alpha)\cdot[\tau\cdot(\beta+\gamma)-2\cdot\beta\cdot\gamma]=$
Αλλά $2\cdot\tau-\alpha=\beta+\gamma$

$= (\beta + \gamma)\cdot(\tau - \beta)(\tau - \gamma) + \tau\cdot(\tau - \alpha)\cdot(\beta + \gamma) - 2\cdot\beta\cdot\gamma\cdot(\tau - \alpha) =$
$= (\beta + \gamma)\cdot[(\tau - \beta)\cdot(\tau - \gamma) + \tau\cdot(\tau - \alpha)] - 2\cdot\beta\cdot\gamma\cdot(\tau - \alpha) =$
$= (\beta + \gamma)\cdot[\tau^2 - (\beta + \gamma)\tau + \beta\cdot\gamma + \tau^2 - \tau\cdot\alpha] - 2\cdot\beta\cdot\gamma\cdot(\tau - \alpha) =$
$= (\beta + \gamma)\cdot[2\tau^2 - (\underline{\alpha +} \beta + \gamma)\cdot\tau - 2\cdot\beta\cdot\gamma\cdot(\tau - \alpha) = (\beta + \gamma)\cdot[2\cdot\tau^2 - 2\cdot\tau^2 + \beta\cdot\gamma) - 2\cdot\beta\cdot\gamma\cdot(\tau - \alpha) =$
$= \beta\cdot\gamma\cdot(\beta + \gamma) - 2\cdot\beta\cdot\gamma\cdot(\tau - \alpha) = \beta\cdot\gamma\cdot[(\beta + \gamma) - 2\cdot(\tau - \alpha)] = \beta\cdot\gamma\cdot(\beta + \gamma - 2\cdot\tau + 2\cdot\alpha) =$
$= \beta\cdot\gamma\cdot[2\cdot\tau - \alpha - 2\cdot\tau + 2\cdot\alpha] = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma$

Παράδειγμα 16

Να αποδειχθεί ότι : $(\tau - \alpha)^3 + (\tau - \beta)^3 + (\tau - \gamma)^3 + 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = \tau^3$.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα :
$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\cdot(\alpha + \beta)\cdot(\beta + \gamma)\cdot(\gamma + \alpha)$, άρα
$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)^3 - 3\cdot(\alpha + \beta)\cdot(\beta + \gamma)\cdot(\gamma + \alpha)$, θέτοντες όπου α το $\tau - \alpha$, β το $\tau - \beta$ και όπου γ το $\tau - \gamma$. Τότε έχουμε :
$(\tau - \alpha)^3 +(\tau - \beta)^3 +(\tau - \gamma)^3 =$
$= [(\tau - \alpha) + (\tau - \beta) + (\tau - \gamma)]^3 - 3\cdot[(\tau - \alpha) + (\tau - \beta)]\cdot[(\tau - \beta) + (\tau - \gamma)]\cdot[(\tau - \gamma) + (\tau - \alpha)] =$
$[3\cdot\tau - \underline{(\alpha + \beta + \gamma)]^3} - 3\cdot[2\cdot\tau - (\alpha + \beta)]\cdot[2\cdot\tau - (\beta + \gamma)]\cdot[2\cdot\tau - (\gamma + \alpha)] = \tau^3 - 3\cdot\gamma\cdot\alpha\cdot\beta.$
Άρα : $(\tau - \alpha)^3 + (\tau - \beta)^3 + (\tau - \gamma)^3 = \tau^3 - 3\cdot\gamma\cdot\alpha\cdot\beta \Leftrightarrow (\tau - \alpha)^3 + (\tau - \beta)^3 + (\tau - \gamma)^3 + 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = \tau^3$.

Παράδειγμα 17

Να αποδειχθεί ότι : $2\cdot\beta\cdot\gamma + (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2) = 4\cdot\tau\cdot(\tau - \alpha)$.

Απόδειξη

$4\cdot\tau\cdot(\tau - \alpha) = 2\cdot\tau\cdot2\cdot(\tau - \alpha) = 2\cdot\tau\cdot(2\cdot\tau - 2\cdot\alpha) = (\alpha + \beta + \gamma)\cdot[(\alpha + \beta + \gamma) - 2\cdot\alpha] =$
$= (\alpha + \beta + \gamma)\cdot(\beta + \gamma - \alpha) = [(\beta + \gamma) + \alpha]\cdot[(\beta + \gamma) - \alpha] = (\beta + \gamma)^2 - \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\cdot\beta\cdot\gamma =$
$= 2\cdot\beta\cdot\gamma + (\beta^2 +\gamma^2 - \alpha^2)$.

Παράδειγμα 18

Να αποδειχθεί ότι : $\tau\cdot(\tau - \alpha) + (\tau - \beta)\cdot(\tau - \gamma) = \beta\cdot\gamma$.

Απόδειξη

$$\tau\cdot(\tau - \alpha) + (\tau - \beta)\cdot(\tau - \gamma) = \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\cdot\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)+\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\beta\right)\cdot\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\gamma\right) =$$
$$= \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\cdot\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-2\alpha}{2}\right)+\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-2\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-2\gamma}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\beta+\gamma-\alpha)+\frac{1}{4}\cdot(\alpha+\gamma-\beta)\cdot(\alpha+\beta-\gamma) =$$
$$= \frac{1}{4}\left[(\beta+\gamma)^2-\alpha^2\right]+\frac{1}{4}\cdot\left[\alpha^2-(\beta-\gamma)^2\right] = \frac{1}{4}\left[(\beta+\gamma)^2-\alpha^2+\alpha^2-(\beta-\gamma)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\left[(\beta+\gamma)^2-(\beta-\gamma)^2\right] = \frac{1}{4}\cdot4\cdot\beta\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma .$$

Παράδειγμα 19

Να αποδειχθεί ότι : $\alpha\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\tau - \alpha)^2 + \beta\cdot(\gamma - \alpha)\cdot(\tau - \beta)^2 + \gamma\cdot(\alpha - \beta)\cdot(\tau - \gamma)^2 = 0$

Απόδειξη

Για την απόδειξη της πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες
$\alpha\cdot(\beta - \gamma) + \beta\cdot(\gamma - \alpha) + \gamma\cdot(\alpha - \beta) = 0$
$\alpha^2\cdot(\beta - \gamma) + \beta^2\cdot(\gamma - \alpha) + \gamma^2\cdot(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\gamma - \alpha) =$
$= \alpha^3\cdot(\beta - \gamma) + \beta^3\cdot(\gamma - \alpha) + \gamma^3\cdot(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta)\cdot(\beta - \gamma)\cdot(\gamma - \alpha)\cdot(\alpha + \beta + \gamma) =$

$= \alpha\cdot(\beta-\gamma)\cdot(\tau-\alpha)^2 + \beta\cdot(\gamma-\alpha)\cdot(\tau-\beta)^2 + \gamma\cdot(\alpha-\beta)\cdot(\tau-\gamma)^2 =$

$= \alpha\cdot(\beta-\gamma)\cdot(\tau^2 - 2\cdot\tau\cdot\alpha + \alpha^2) + \beta\cdot(\gamma-\alpha)\cdot(\tau^2 - 2\cdot\tau\cdot\beta + \beta^2) + \gamma\cdot(\alpha-\beta)\cdot(\tau^2 - 2\cdot\tau\cdot\gamma + \gamma^2) =$

$$= \left[\underset{0}{\xleftrightarrow{\alpha(\beta-\gamma)+\beta(\gamma-\alpha)+\gamma(\alpha-\beta)}}\right]\cdot\tau^2 - 2\tau\cdot\left[\underset{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{\xleftrightarrow{\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)}}\right] + \left[\underset{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)}{\xleftrightarrow{\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)}}\right] =$$

$= 2\cdot\tau\cdot(\alpha-\beta)\cdot(\beta-\gamma)\cdot(\gamma-\alpha) - (\alpha-\beta)\cdot(\beta-\gamma)\cdot(\gamma-\alpha)\cdot 2\cdot\tau = 0.$

Παράδειγμα 20

Να αποδειχθεί ότι ισχύει :

$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 - (\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)^2 = (\alpha^2-\beta\cdot\gamma)^2 + (\beta^2-\alpha\cdot\gamma)^2 + (\gamma^2-\alpha\cdot\beta)^2$

Απόδειξη

Εφαρμογή της ταυτότητος Lagrange :

α β γ

x y ω

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\cdot(x^2+y^2+\omega^2) - (\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma\cdot\omega)^2 = \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ x & y\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ y & \omega\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\gamma & \alpha\\ \omega & x\end{vmatrix}^2.$$

Θέτουμε όπου x το β , όπου y το γ και όπου ω το α . Τότε έχουμε :

α β γ

β γ α

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\cdot(\beta^2+\gamma^2+\alpha^2) - (\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)^2 = \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \gamma & \alpha\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\gamma & \alpha\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}^2 =$$

$= (\alpha\cdot\gamma-\beta^2)^2 + (\alpha\cdot\beta-\gamma^2)^2 + (\beta\cdot\gamma-\alpha^2)^2 = (\alpha^2-\beta\cdot\gamma)^2 + (\beta^2-\gamma\cdot\alpha)^2 + (\gamma^2-\alpha\cdot\beta)^2.$

Παράδειγμα 21

Να αποδειχθεί ότι :

$(\alpha+\beta)^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta-1) - 1 = (\alpha+\beta-1)\cdot(\alpha^2+\beta^2-\alpha\cdot\beta+\alpha+\beta+1).$

Απόδειξη

$(\alpha+\beta)^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta-1) - 1 = \alpha^3+\beta^3+3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta) - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta) + 3\cdot\alpha\cdot\beta - 1 =$

$= \alpha^3+\beta^3-1+3\cdot\alpha\cdot\beta = \alpha^3+\beta^3+(-1)^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot(-1) =$

$= (\alpha+\beta-1)\cdot[\alpha^2+\beta^2+(-1)^2-\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot(-1)-\beta\cdot(-1)] = (\alpha+\beta-1)\cdot(\alpha^2+\beta^2+1-\alpha\cdot\beta+\alpha+\beta).$

(Εφαρμογή της ταυτότητας ΕυΙβΓ :

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\cdot\beta-\beta\cdot\gamma-\gamma\cdot\alpha).$

Παράδειγμα 22

Αν $x = \alpha\cdot(\beta-\gamma)$, $y = \beta\cdot(\gamma-\alpha)$, $\omega = \gamma\cdot(\alpha-\beta)$, με $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma \neq 0$ τότε να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{x^3}{\alpha^3}+\frac{y^3}{\beta^3}+\frac{\omega^3}{\gamma^3} = 3\cdot\frac{x\cdot y\cdot\omega}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}.$$

Απόδειξη

$$\left\{\begin{matrix} x=\alpha(\beta-\gamma)\\ y=\beta(\gamma-\alpha)\\ \omega=\gamma(\alpha-\beta)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{x}{\alpha}=\beta-\gamma\\ \dfrac{y}{\beta}=\gamma-\alpha\\ \dfrac{\omega}{\gamma}=\alpha-\beta\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{\omega}{\gamma}=0.$$

Άρα :

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^3+\left(\frac{y}{\beta}\right)^3+\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^3=3\cdot\frac{x\cdot y\cdot\omega}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}\Rightarrow\frac{x^3}{\alpha^3}+\frac{y^3}{\beta^3}+\frac{\omega^3}{\gamma^3}=3\cdot\frac{x\cdot y\cdot\omega}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}.$$

Παράδειγμα 23

Αν $\alpha+\beta+\gamma=6$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=36$, $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=6$, τότε να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$;

Απόδειξη

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\cdot(\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)$, άρα

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2\cdot(\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)=36-2\cdot(\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)$,

Άρα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\cdot(\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)=36$.

Όμως : $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\cdot\beta-\beta\cdot\gamma-\gamma\cdot\alpha)=$

$=36-3\cdot6=6\cdot[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)]$,

Άρα : $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)=3$.

Θέτουμε : $x=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ και $y=\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha$.

Τότε έχουμε : $\{x+2\cdot y=36$ και $x-y=3\}\Rightarrow\{x=14,\ y=11\}$.

Άρα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=14$.

(Ταυτότητες υπό συνθήκες)

Παράδειγμα 24

Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδείξετε ότι : $(\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)^2=\alpha^2\cdot\beta^2+\beta^2\cdot\gamma^2+\gamma^2\cdot\alpha^2$.

Απόδειξη

$(\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)^2=\alpha^2\cdot\beta^2+\beta^2\cdot\gamma^2+\gamma^2\cdot\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta^2\cdot\gamma+2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma^2+2\cdot\alpha^2\cdot\beta\cdot\gamma=$

$=\alpha^2\cdot\beta^2+\beta^2\cdot\gamma^2+\gamma^2\cdot\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha^2\cdot\beta^2+\beta^2\cdot\gamma^2+\gamma^2\cdot\alpha^2$.

Παράδειγμα 25

Εάν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A=\frac{1}{2\alpha^2+\beta\gamma}+\frac{1}{2\beta^2+\gamma\alpha}+\frac{1}{2\gamma^2+\alpha\beta}$$

Απόδειξη

Αφού $\alpha+\beta+\gamma=0\Rightarrow\gamma=-\alpha-\beta\Rightarrow\beta\cdot\gamma=-\alpha\cdot\beta-\beta^2$, άρα

$2\cdot\alpha^2+\beta\cdot\gamma=2\cdot\alpha^2-\alpha\cdot\beta-\beta^2=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\alpha^2-\beta^2=\alpha\cdot(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=$

$=(\alpha-\beta)\cdot(2\cdot\alpha+\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha+\alpha+\beta)=$ $[\alpha+\beta=\cdot\cdot\cdot=-\gamma]$

$=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\gamma)=-(\alpha-\beta)\cdot(\gamma-\alpha)$.

Άρα η παράσταση γίνεται :

$$A=-\frac{1}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}-\frac{1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}-\frac{1}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

$$A=-\frac{(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)+(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=0\Rightarrow A=0.$$

Παράδειγμα 26

Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις :

i). $\alpha^2-\beta\cdot\gamma=\beta^2-\alpha\cdot\gamma$.

ii). $\alpha^2-\beta\cdot\gamma=\frac{1}{2}\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

iii). $\gamma^2=\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2$.

Απόδειξη

i). Ισχύει : $\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -\gamma \Rightarrow$ [πολ/ζω με (α – β)]
$= (\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta) = -\gamma\cdot(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2 = -\alpha\cdot\gamma + \beta\cdot\gamma \Rightarrow \alpha^2 - \beta\cdot\gamma = \beta^2 - \alpha\cdot\gamma$.

ii). Ισχύει :$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -(\beta + \gamma) \Rightarrow \alpha^2 = [-(\beta + \gamma)]^2 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + 2\cdot\beta\cdot\gamma + \gamma^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cdot\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\cdot\beta\cdot\gamma \Rightarrow 2\cdot\alpha^2 - 2\cdot\beta\cdot\gamma = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow 2\cdot(\alpha^2 - \beta\cdot\gamma) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha^2 - \beta\cdot\gamma = \frac{1}{2}(\cdot\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$.

iii). Ισχύει : $\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -(\alpha + \beta) \Rightarrow \gamma^2 = [-(\alpha + \beta)]^2 \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2$

Παράδειγμα 27

Εάν ισχύει : $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = 0$, με $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma \neq 0$ τότε :
i). Να αποδείξετε ότι : $\alpha\cdot\beta + \beta\cdot\gamma + \gamma\cdot\alpha = 0$.
ii).Να υπολογίσετε την παράσταση : $A = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$.

Απόδειξη

i). Έχουμε : $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma} = 0 \Rightarrow \alpha\cdot\beta + \beta\cdot\gamma + \gamma\cdot\alpha = 0 \Rightarrow \alpha\cdot\beta + \beta\cdot\gamma + \gamma\cdot\alpha = 0$

ii). $\alpha\cdot\beta + \beta\cdot\gamma + \gamma\cdot\alpha = 0 \Rightarrow \gamma\cdot(\alpha + \beta) = -\alpha\cdot\beta - \alpha\cdot\beta \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\gamma} = -\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma^2}$.

Ομοίως κυκλικά αντικαθιστώντας , έχουμε :

$$A = -\frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha^2}-\frac{\gamma\cdot\alpha}{\beta^2}-\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma^2} = -\left(\frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha^2}+\frac{\gamma\cdot\alpha}{\beta^2}+\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma^2}\right) = -\frac{\alpha^3\cdot\beta^3+\beta^3\cdot\gamma^3+\gamma^3\cdot\alpha^3}{\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\gamma^2} =$$

(Χρησιμοποιούμε την Ταυτότητα Euler)

$$A = -\frac{3\cdot(\alpha\beta)\cdot(\beta\gamma)\cdot(\gamma\alpha)}{\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\gamma^2} \Rightarrow A = -3.$$

Παράδειγμα 28

Εάν $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = 1$, να υπολογισθεί η παράσταση : $A = \frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1}$.

Απόδειξη

Μετασχηματίζουμε το πρώτο και τρίτο κλάσμα ώστε αυτά να γίνουν ομώνυμα
του δεύτερου : [αφού ισχύει $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = 1$]

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1} = \frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha\left(\beta+1+\beta\gamma\right)} = \frac{1}{\beta+1+\beta\gamma}.$$

$$\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} = \frac{\gamma}{\frac{1}{\beta}+\gamma+1} = \frac{\gamma}{\frac{1+\beta\gamma+\beta}{\beta}} = \frac{\beta\gamma}{1+\beta\gamma+\beta}.$$

$$A = \frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} = \frac{1}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\beta\gamma}{\beta\gamma+\beta+1} = \frac{1+\beta+\beta\gamma}{\beta\gamma+\beta+1} = 1.$$

Άρα : A = 1