

1 ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

α). Να αποδείξετε ότι : Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.

β). Διατυπώστε το πρώτο θεώρημα των διμέσων.

γ). Να γράψετε τους τύπους που δίνουν :

i). Το απόστημα κανονικού εξαγώνου συναρτήσει της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.

ii). Το μήκος του τόξου \widehat{AB} , όπου $\widehat{AOB} = \mu^\circ$. (μ.7+8+10)

ΘΕΜΑ 2

Δίδεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με $AB = 3$ και $A\Gamma = 4$. Να βρείτε :

i). Την υποτείνουσα $B\Gamma$.

ii). Το ύψος u_a .

iii). Την προβολή της πλευράς AB πάνω στην υποτείνουσα $B\Gamma$. (μ.6+10+9)

ΘΕΜΑ 3

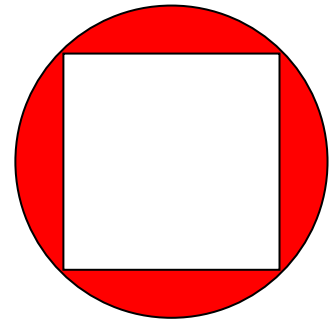
Αν $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο και M τυχαίο σημείο να αποδείξετε ότι : $MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2$. (μ.25)

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα έχουμε τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο με πλευρά 20 m.

i). Πόσα μέτρα φράκτη θα χρειαστούμε για να φράξουμε το γραμμοσκιασμένο τμήμα.

ii). Πόσο είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος.



2 ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ**ΘΕΜΑ 1**

A). Να αποδειχθεί ότι για την πλευρά λ_4 και το απόστημα α_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο

$$(O, R) \text{ ισχύουν : } \lambda_4 = R \cdot \sqrt{2} \quad \text{και} \quad \alpha_4 = \frac{R \cdot \sqrt{2}}{2}. \quad (\mu.10)$$

B). Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ να συμπληρωθούν οι σχέσεις ώστε να εκφράζουν το πρώτο και δεύτερο θεώρημα των διαμέσων αντίστοιχα.

$$\alpha). AB^2 + A\Gamma^2 = \dots \quad \beta). A\Gamma^2 - AB^2 = \dots$$

Γ). χαρακτηρίστε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

1). Αν $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο ($A = 90^\circ$) και $A\Delta$ το ύψος, τότε $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$.

2). Αν δύο χορδές $AB, \Gamma\Delta$ κύκλου (O, R) τέμνονται στο σημείο P τότε ισχύει :
 $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$.

3). Το εμβαδόν E τριγώνου είναι $E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta \mu A$.

4). Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A < 90^\circ$ αν και μόνο αν $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$.

5). Η γωνία φ_n κανονικού n -γωνου είναι $\varphi_n = 360^\circ - \frac{360^\circ}{n}$. (μ.10)

ΘΕΜΑ 2

Τα μήκη των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ είναι : $AB = 5, A\Gamma = 7$ και $B\Gamma = 10$.

α). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β). Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM

γ). Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου AM στη $B\Gamma$. (μ.8+8+9)

ΘΕΜΑ 3

Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά $AB = 15$.

Να υπολογίσετε

α). Την ακτίνα R του κύκλου.

β). Το εμβαδόν του κύκλου (O, R) .

γ). Το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$. (μ.8+8+9)

ΘΕΜΑ 4

Κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta E\Z$ και ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma E$

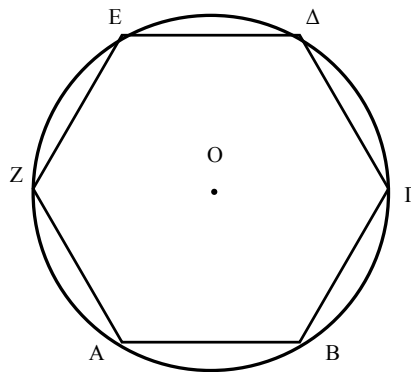
είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R)

Να υπολογιστούν :

α). Η πλευρά $A\Gamma$ αν $AB = 6$.

β). Ο λόγος $\frac{(AB\Gamma\Delta E\Z)}{(A\Gamma E)}$ των εμβαδών τους.

(μ.12+13)



3 ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ**ΘΕΜΑ 1**

A). Να αποδειχθεί ότι η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί την απέναντι πλευρά εσωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών, δηλαδή αν AD διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$,

$$\text{ισχύει } \frac{DB}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}. \text{ (θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου).}$$

B). Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του. Δηλαδή αν B, β οι βάσεις του τραπεζίου και ν το ύψος, ισχύει :

$$E = \frac{(B + \beta)}{2} \cdot \nu.$$

ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έστω Z τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Delta$. Φέρνουμε την ΓZ η οποία τέμνει την προέκταση της BA στο E .

i). Να δείξετε ότι τα τρίγωνα BEG και $\Gamma\Delta Z$ είναι όμοια.

ii). Να δείξετε ότι $\frac{B\Gamma}{\Delta Z} = \frac{BE}{\Delta\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 3

Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα $\widehat{AB} = 120^\circ$, $\widehat{B\Gamma} = 60^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta} = 90^\circ$.

i). Να εξηγήσετε ποιον κανονικών πολυγώνων είναι πλευρές οι χορδές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA και να τις υπολογίσετε συναρτήσει του R .

ii). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση του R .

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 10$, $B\Gamma = 14$ και $A\Gamma = 6$.

i). Ποιο είναι το είδος του παραπάνω τριγώνου ως προς τις γωνίες του ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii). Να υπολογιστεί το μήκος της διαμέσου μ_a .

iii). Να υπολογιστεί το μήκος της προβολής της διαμέσου μ_a στην πλευρά $B\Gamma$.

iv). Να υπολογιστεί η προβολή της AB πάνω στην $B\Gamma$.

4 ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

A). Αποδείξτε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινούςας.

B). Αντιστοιχίστε κάθε στοιχείο της στήλης A με ένα μόνο στοιχείο της στήλης B.

A στήλη	B στήλη
1). λ_3	α). $\frac{R\sqrt{3}}{2}$
2). α_3	β). $\frac{R\sqrt{2}}{2}$
3). λ_4	γ). $\frac{R}{2}$
	δ). $R\sqrt{2}$
	ε). R

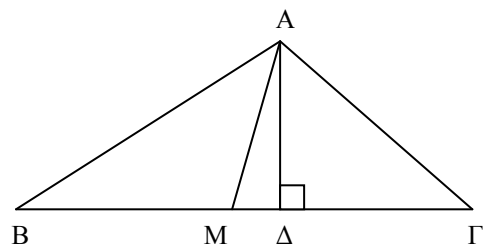
Γ). Χαρακτηρίστε με σωστό ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις.

- 1). Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) και AΔ ύψος, ισχύει $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$.
- 2). Αν P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O, R) τότε $\Delta^P_{(O, R)} < 0$.
- 3). Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο Ομοιότητας τους.
- 4). Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών τους. (μ.11+6+8)

ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι AM διάμεσος, $AB = 5$, $B\Gamma = 7$ και $A\Delta = 3$.

- 1). Ναδειχθεί ότι : $B\Delta = 4$
- 2). Ναδειχθεί ότι $A\Gamma = 3 \cdot \sqrt{2}$
- 3). Να υπολογισθεί η AM.
- 4). Να βρεθεί το είδος του τριγώνου



ΘΕΜΑ 3

Στο τρίγωνο ABΓ είναι $AB = 6$, $A\Gamma = 10$. Στις πλευρές AB και AΓ βρίσκονται τα Δ, E αντίστοιχα τέτοια ώστε $B\Delta = 1$ cm και $AE = 3$ cm.

- 1). Να βρείτε το ύψος προς την AΓ είναι 3 cm.
- 2). Ναδειχθεί ότι $(AB\Gamma) = 4 \cdot (A\Delta E)$.
- 3). Να δείξετε ότι : $(B\Delta E\Gamma) = 3 \cdot (A\Delta E)$. (μ.5+12+8)

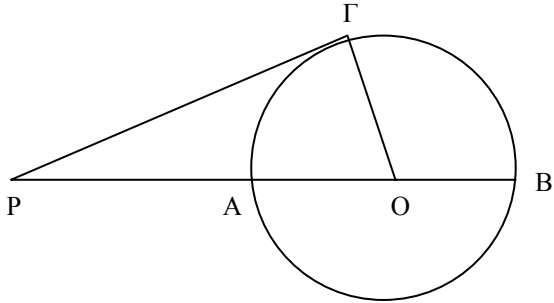


ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος $(O, 4)$ και AB διάμετρος. Αν P στην προέκταση της διαμέτρου BA , (προς το μέρος του A) με $PA = 4$ και $P\Gamma$ εφαπτόμενη του κύκλου, τότε :

- 1). Να βρεθεί η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο $(O, 4)$.
- 2). Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $PO\Gamma$.
- 3). Να υπολογισθεί το εμβαδόν του μιστόγραμμου τριγώνου $PA\Gamma$.

(μ.6+7+12)



ΘΕΜΑ 1

A). Αποδείξτε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.

B). Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος.

1). Αν $A > 90^\circ$, τότε $a^2 < b^2 + c^2$.

2). Σε κάθε κανονικό n -γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) , ισχύει: $\frac{\lambda_n^2}{2} + \alpha_n^2 = R^2$.

3). Το μήκος ενός κύκλου, που είναι ακτίνα $R = 1$ είναι $L = \pi$.

4). Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.

5). Το σημείο P ανήκει στον κύκλο (O, R) αν: $\Delta_{(O, R)}^P < 0$. (μ.10)

ΘΕΜΑ 2

Δίδεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 1$ και $B\Gamma = \sqrt{3}$. Να υπολογίσετε :

α). Την γωνία A .

β). Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

γ). Τη διάμεσο $BM = \mu_\beta$. (μ.9+9+7)

ΘΕΜΑ 3

Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο του οποίου το άθροισμα των γωνιών του είναι 8 ορθές και το εμβαδόν του $6 \cdot \sqrt{3}$. Υπολογίστε :

α). Την ακτίνα R του κύκλου. (μ.8)

β). Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O, R) . (μ.7)

γ). Το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στο ίδιο κύκλο. (μ.10)

ΘΕΜΑ 4

Δίδεται κύκλος (O, R) και τα διαδοχικά σημεία A, B και Γ ώστε $AB = \lambda_3$ και $B\Gamma = \lambda_6$.

Αν AM είναι διάμεσος στο τρίγωνο $AB\Gamma$ που προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Δ , τότε :

α). Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (μ.7)

β). Να υπολογίσετε τα τμήματα AM και $M\Delta$. (μ.8)

γ). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $BM\Delta$. (μ.10)

ΘΕΜΑ 1

A). Αποδείξτε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι δύο ορθές. (μ.15)

B). Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος.

- 1). Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει μια γωνία ορθή τότε έχει ίσες διαγωνίους.
- 2). Το εγγράψιμο σε κύκλο τετράπλευρο έχει τις απέναντί του γωνίες ίσες.
- 3). Η διάμεσος του τραπεζίου είναι ίση με το ημιάθροισμα των βάσεων του.
- 4). Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με την υποτείνουσα.
- 5). Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία του. (μ.10)

ΘΕΜΑ 2

Στην προέκταση της πλευράς AB παραλληλογράμμου ABΓΔ παίρνουμε τμήμα BM = BΓ, ενώ στην προέκταση της ΔΑ παίρνουμε το σημείο P με ΔP = ΔΓ. Να αποδείξουμε ότι :

α). Η γωνία BPG είναι ίση με $90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$. (μ.10)

β). ΓM είναι κάθετη στην ΓP. (μ.15)

ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) με $AB < AΓ$ και την διάμεσο του AM. Από το B φέρνουμε το κάθετο τμήμα BΔ προς την AM. Η διχοτόμος της γωνίας ΔBM τέμνει την AΓ στο E. Να δείξετε ότι : $AE = AB$. (μ.25)

ΘΕΜΑ 4

Δίδεται τετράπλευρο ABΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διχοτόμος της γωνίας ABΔ τέμνει την διαγώνιο AΓ στο Λ ενώ η διχοτόμος της γωνίας AΓΔ τέμνει την BΔ στο K. Να δείξετε ότι :

α). Το τετράπλευρο BΓKΛ είναι εγγράψιμο.

β). $\Lambda K \parallel AΔ$. (μ.10+15)

8 ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ**ΘΕΜΑ 1**

- α). Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το πυθαγόρειο θεώρημα. (μ.13)
β). Τι ονομάζουμε δύναμη σημείου ως προς κύκλο ; Πως συμπεραίνουμε αν ένα σημείο είναι εσωτερικό , εξωτερικό ή σημείο του κύκλου. (μ.12)

ΘΕΜΑ 2

α). Επιλέξτε την σωστή απάντηση

1). Δίδεται κύκλος με ακτίνα $\rho = 3$. το μήκος τόξου 45° ισούται με :

[A]. 4 [B]. $\frac{3\pi}{4}$ [Γ]. $\frac{3\pi}{2}$ [Δ]. $\frac{\pi}{3}$

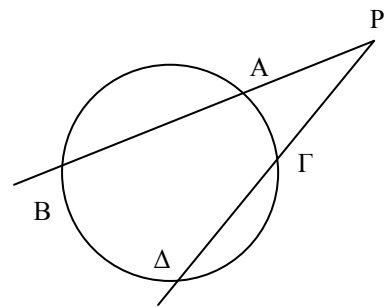
2). Δίδεται τραπέζιο με διάμετρο 10 και ύψος 2. ένα τετράγωνο ισοδύναμο με αυτό το τραπέζιο θα έχει πλευρά :

[A]. $\sqrt{5}$ [B]. 5 [Γ]. $2\cdot\sqrt{5}$ [Δ]. 10

3). Δίδεται κανονικό πολύγωνο με γωνία 144° . το πλήθος των πλευρών του είναι :

[A]. 144 [B]. 3 [Γ]. 10 [Δ]. 14

β). Στο σχήμα δίδονται τα μήκη $PA = 3$, $AB = 4$, $PG = 3,5$.
Να υπολογίσετε το $\Gamma\Delta$.

**ΘΕΜΑ 3**

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ δίδεται ότι $\beta^2 = 4\cdot\alpha^2 + \gamma^2$.

α). Τι συμπεραίνεται για το είδος της γωνίας B και έπειτα για το είδος του τριγώνου ;

β). Να αποδείξετε ότι : $\mu_\beta^2 = \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2}$ και ότι $\gamma > \sqrt{2} \cdot \alpha$.

γ). Αν επιπλέον δίδονται $\alpha = 2$ και $\gamma = 5$, να βρείτε τις διαμέσους μ_α , μ_β , μ_γ . (μ.8+8+9)

ΘΕΜΑ 4

α). Δίδεται κύκλος με ακτίνα $R = 4$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

β). Για τον ίδιο κύκλο, να υπολογίσετε το εμβαδόν κυκλικού τομέα 90° .

γ). Με βάση αυτόν τον κύκλο, σχηματίζεται κύλινδρος ύψους 10. Να βρείτε τον όγκο του κυλίνδρου. (μ.7+9+9)

9 ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

- A). Σε κύκλο (O, R) να εγγράψετε κανονικό εξάγωνο. Να αποδείξετε ότι : $\lambda_6 = R$ και $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.
- B). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως σωστές ή λάθος.
- 1). Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) ισχύει : $\alpha^2 = \beta^2 - \gamma^2$.
 - 2). Σε κάθε τρίγωνο ισχύει : $\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$.
 - 3). Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O, R) αν και μόνο αν : $\Delta^P_{(O, R)} \leq 0$.
 - 4). Η κεντρική γωνία ν - γώνου είναι : $\omega_\nu = \frac{360^\circ}{\nu}$.
 - 5). Το μήκος του κύκλου είναι : $L = 2 \cdot \pi \cdot R$.

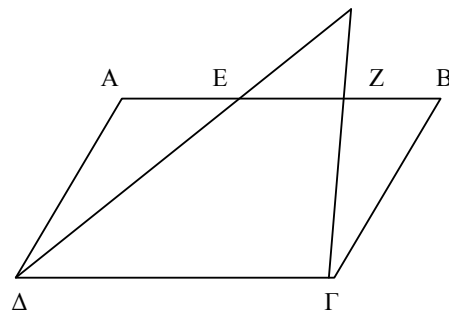
ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Να αποδείξετε ότι : $A\Delta^2 = AB^2 + 2 \cdot B\Gamma^2$. (μ.25)

ΘΕΜΑ 3

Στο σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με $AB = 6$, $A\Delta = 4$ και γωνία $A = 120^\circ$.

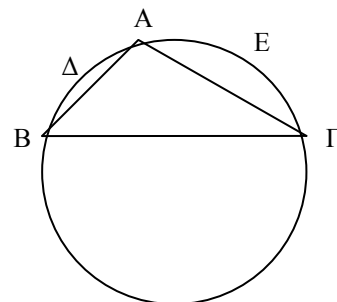
- 1). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του $(AB\Gamma\Delta)$.
- 2). Αν $AE = EZ = ZB$ να υπολογίσετε το εμβαδόν $(EZ\Gamma\Delta)$.
- 3). Αν οι ΔE , ΓZ τέμνονται στο M να υπολογίσετε το εμβαδόν του (MEZ) .



ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 7$, $\beta = 5$ και $\gamma = 3$. εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) .

- 1). Να αποδείξετε ότι γωνία $A = 120^\circ$.
- 2). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- 3). Την ακτίνα R του κύκλου.
- 4). Το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων $AB\Delta$ και $A\Gamma Z$.



ΘΕΜΑ 1

A). α). Σε κύκλο (O, R) να εγγράψετε τετράγωνο.

β). Να αποδείξετε ότι $\lambda_4 = R \cdot \sqrt{2}$ και $a_4 = \frac{R \cdot \sqrt{2}}{2}$, όπου λ_4 η πλευρά και a_4 το απόστημα του τετραγώνου.

B). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την λέξη σωστό ή λάθος.

Σε κάθε κανονικό πολύγωνο ακτίνας R .

1). Ισχύει η σχέση $\alpha_n^2 + \frac{\lambda_n^2}{2} = R^2$, όπου λ_n η πλευρά και α_n το απόστημα του τετραγώνου.

2). Η σχέση $\omega_n = \frac{360^\circ}{n}$ υπολογίστε την γωνία του n -γώνου.

ΘΕΜΑ 2

Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές a, β, γ τέτοιες ώστε να ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 5 \cdot a^2$. Αν η διάμεσος AM τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$ στο Δ :

α). Να εκφράσετε τη διάμεσο AM ως συνάρτηση της πλευράς a .

β). Να αποδείξετε ότι: $AM \cdot A\Delta = \frac{5a^2}{2}$. (μ.10+15)

ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε 4 διαδοχικές γωνίες $XOY, YOZ, ZO\tau$, και tOX έτσι ώστε $XOY = 50^\circ, YOZ = 130^\circ, ZO\tau = 150^\circ$. Στις ημιευθείες $OX, OY, OZ, O\tau$ παίρνουμε τα σημεία A, B, Γ, Δ αντίστοιχα έτσι ώστε $OA = 3, OB = 5, O\Gamma = 6, O\Delta = 4$.

α). Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E_{O\Delta A}$ του τριγώνου $O\Delta A$.

β). Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών: $\frac{E(OAB)}{E(OB\Gamma)}$. (μ.12+13)

ΘΕΜΑ 4

Δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 6)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Αν η ευθεία (ε) εφάπτεται στους κύκλους αυτούς στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, να υπολογίσετε:

α). Το εμβαδόν του τραπέζιου $ΚΛΓΒ$.

β). Το εμβαδόν S του μεικτόγραμου τριγώνου $AB\Gamma$. (μ.10+15)

ΘΕΜΑ 1

- A). Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς. (μ.13)
- B). α). Πότε δύο ευθείες στον χώρο λέγονται ασύμβατες ;
β). Πότε μια ευθεία λέγεται παράλληλη σε ένα επίπεδο.
γ). Να χαρακτηρίσετε κάθε μια πρόταση ως σωστή ή λάθος.
1). Τρία σημεία στον χώρο ορίζουν πάντα ένα επίπεδο.
2). Δύο επίπεδα που τέμνονται έχουν άπειρα κοινά σημεία.

ΘΕΜΑ 2

Να αποδείξετε ότι η προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί κάθε κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους.

ΘΕΜΑ 3

Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι : $(ABE)^2 = (ADE) \cdot (ABΓ)$. (μ.25)

ΘΕΜΑ 4

Δίδεται κύκλος (Ο, R) και ακτίνα ΟΑ. Στην προέκταση της ΟΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Β ώστε ΟΑ = ΑΒ. Αν ΒΓ είναι εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το Β προς τον κύκλο, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ που έχει ως πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ και το τόξο ΑΓ του κύκλου. (μ.25)

ΘΕΜΑ 1

- A). Να αποδείξετε ότι : Αν από ένα εξωτερικό σημείο P κύκλου (O, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα PE και μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία A, B τότε ισχύει $PE^2 = PA \cdot PB$.
- B). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη σωστό ή λάθος
- 1). Σε τρίγωνο ABΓ με $\alpha^2 < \beta^2 - \gamma^2$ είναι $A < 90^\circ$.
 - 2). Αν α η πλευρά τετραγώνου και δ η διαγώνιος του τότε ο αριθμός $\frac{\delta}{\alpha}$ είναι ρητός.
 - 3). Αν α, β, γ οι πλευρές ενός τριγώνου και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τότε το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \rho$.
 - 4). Αν δ₁, δ₂ οι κάθετες διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου τότε το εμβαδόν του δίδεται από τον τύπο $E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$.
 - 5). Ο λόγος των εμβαδών δύο κανονικών πολυγώνων ισούται με το λόγο των ακτίνων τους

ΘΕΜΑ 2

Δίδονται δύο ευθύγραμμα τμήματα AB, AΓ με K, Λ τα μέσα αυτών αντίστοιχα.

- α). Να δείξετε ότι : $\frac{(AK\Gamma)}{(A\Lambda B)} = 1$.
- β). Αν P το σημείο τομής των ΒΛ, ΓΚ να δείξετε ότι : $(PKB) = (P\Lambda\Gamma)$.

ΘΕΜΑ 3

Δίδονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, R) και (O, ρ) με $R > \rho$.

Η διάμετρος AB του κύκλου (O, R) τέμνει τον κύκλο (O, ρ) στα σημεία Γ και Δ.

Αν Μ σημείο του κύκλου (O, R) τέτοιο ώστε $M\Delta \perp AB$ και E το σημείο τομής της ΜΓ με τον κύκλο (O, ρ), να αποδείξετε ότι :

- α). $MA^2 = 2 \cdot R \cdot (R + \rho)$.
- β). $ME \cdot M\Gamma = A\Delta \cdot \Delta B$.
- γ). $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2 \cdot (R^2 + \rho^2)$.
- δ). $\Delta_{(O, \rho)}^M + \Delta_{(O, R)}^E = \Delta_{(O, \rho)}^\Gamma$.
- ε). $(MAB) = R \cdot \sqrt{\Delta_{(O, \rho)}^O - \Delta_{(O, R)}^O}$.

ΘΕΜΑ 4

Η ακτίνα κανονικού ν - γώνου είναι $R = 6 \cdot \sqrt{3}$ και το απόστημα $a_n = 9$.

- α). Να δείξετε ότι $\lambda_n = 6 \cdot \sqrt{3}$.
- β). Να δείξετε ότι $\nu = 6$.
- γ). Να βρείτε την γωνία ϕ_6 .
- δ). Έστω Μ τυχαίο σημείο εσωτερικό του πολυγώνου. Αμ d_1, d_2, \dots, d_n οι αποστάσεις αυτού από τις πλευρές του πολυγώνου να αποδείξετε ότι : $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 54$.

ΘΕΜΑ 1

A). Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με $E = \tau \cdot \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου. (μ.13)

B). Πως ορίζεται η δύναμη ενός σημείου P ως προς έναν κύκλο κέντρου O και ακτίνας R ; (μ.5)

Γ). Είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις : (μ.10)

- 1). Αν για τις πλευρές α, β, γ ενός τριγώνου ισχύει : $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι Οξυγώνιο.
- 2). Αν δύο χορδές $AB, \Gamma\Delta$ ενός κύκλου τέμνονται στο σημείο P είτε εσωτερικά είτε εξωτερικά του κύκλου τότε ισχύει $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$.
- 3). Η διάμεσος ενός τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.
- 4). Η πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίση με την ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου.

ΘΕΜΑ 2

Ισόπλευρο τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 1$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου. (μ.25)

ΘΕΜΑ 3

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 60^\circ$, $AB = 2$, $A\Gamma = 5$. Να βρείτε :

- i). Το εμβαδόν του τριγώνου.
- ii). Το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4

Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διάμεσος του, AM τέμνει τον κύκλο στο E . Να αποδείξετε ότι :

i). $AM \cdot ME = \frac{B\Gamma^2}{4}$.

ii). $AB^2 + A\Gamma^2 = 2 \cdot AM \cdot AE$.

15 ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

A). Να αποδειχθεί ότι : σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινούςας.

B). Πότε ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό ;

Γ). Η τιμή κάθε μεγέθους που αναφέρεται στην στήλη A του πίνακα που ακολουθεί, δίδεται με έναν από τους τύπους που υπάρχουν στην στήλη B. Να αντιστοιχίσετε.

Στήλη A	Στήλη B
A). πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R.	1). $R \cdot \sqrt{2}$
B). Απόστημα ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R	2). $\frac{R\sqrt{2}}{2}$
Γ). Πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R	3). $\frac{R}{2}$
Δ). Απόστημα κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R	4). R
	5). $\frac{R\sqrt{3}}{2}$
	6). $R \cdot \sqrt{3}$

ΘΕΜΑ 2

Δίδεται ορθογώνιο τραπέζιο ABΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB < \Gamma\Delta$, $\angle A = \angle \Delta = 90^\circ$, $AB = 4$, $A\Delta = 3$, $B\Gamma = 5$.

Να υπολογίσετε :

α). Την προβολή της BΓ πάνω στην ΔΓ.

β). Το εμβαδόν του τραπέζιου ABΓΔ.

γ). Το εμβαδόν του τριγώνου ΔBΓ.

(μ.9+9+7)

ΘΕΜΑ 3

Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ με πλευρά $AB = 15$. Να υπολογίσετε

α). Την ακτίνα R του κύκλου.

β). Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O, R).

γ). Το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ABΓ.

δ). Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο. (μ.6+6+6+7)

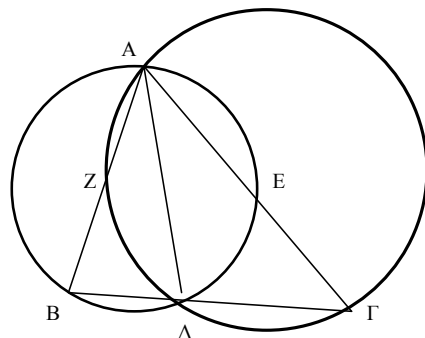
ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ABΓ φέρνουμε τη διχοτόμο AΔ. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ABΔ και AΓΔ τέμνουν τις ευθείες AΓ και AB στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι :

α). $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{BZ \cdot AB}{\Gamma E \cdot A\Gamma}$

β). $BZ = \Gamma E$.

(μ.13+12)



ΘΕΜΑ 1

A). Αν P εσωτερικό σημείο ενός κύκλου (O, ρ) και AB και ΓΔ δύο χορδές του κύκλου που διέρχονται από το P, να αποδείξετε ότι : $PA \cdot PB = PG \cdot PD$. (μ.13)

B). Επιλέξτε σωστό ή λάθος για τις παρακάτω προτάσεις.

- 1). Σε ένα τρίγωνο ABΓ με $\beta > \gamma$ ισχύει : $\beta^2 - \gamma^2 = 2 \cdot \alpha \cdot M\Delta$, η προβολή της διαμέσου μ_α του τριγώνου πάνω στην πλευρά α .
- 2). Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της ημιδιαφοράς των βάσεων του επί το ύψος του.
- 3). Η πλευρά λ_6 ενός κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R είναι $\lambda_6 = R$.
- 4). Το μήκος κύκλου ακτίνας 1 είναι $2 \cdot \pi$. (μ.12)

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\alpha = 6$, $\beta = 7$ και $\gamma = 11$.

i). Να βρείτε το είδος του τριγώνου.

ii). Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου μ_γ . (μ.12+13)

ΘΕΜΑ 3

Δίδεται τρίγωνο ABΓ με $(AB\Gamma) = 120$ τ.μ. και σημείο Δ εσωτερικό της ΒΓ τέτοιο ώστε

$$B\Delta = \frac{2}{3} \cdot B\Gamma.$$

i). Να υπολογιστεί το $(AB\Delta)$.

ii). Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα να υπολογίσετε το (AEZ) . (μ.12+13)

ΘΕΜΑ 4

Δίδεται κύκλος (O, R) και μια ακτίνα R. Στην προέκταση της ΟΑ παίρνουμε τμήμα $AB = OA$ και από το Β φέρνουμε εφαπτόμενη ΒΓ του (O, R).

A). Να υπολογισθεί το μήκος της ΒΓ σε συνάρτηση του R.

B). Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (O.ΑΓ) σε συνάρτηση του R.

Γ). Να υπολογισθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου σχήματος ABΓ σε συνάρτηση του R.

ΘΕΜΑ 1

A). Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η ισοδυναμία : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $A = 90^\circ$.
Επιλέξτε σωστό ή Λάθος.

B). Τι ονομάζουμε δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R) ;

Γ). Το εμβαδόν ενός τραπεζίου με βάσεις B και b και ύψος h είναι $E = \dots$

Δ). Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίως τριγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητας τους.
Επιλέξτε σωστό ή λάθος.

E). Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.

ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε την διάμεσο AM και πάνω σε αυτή παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Δ .

Να αποδείξετε ότι :

i). $(\Delta MB) = (\Delta M\Gamma)$.

ii). $(A\Delta B) = (A\Delta\Gamma)$.

ΘΕΜΑ 3

Στο ρόμβο $AB\Gamma\Delta$, η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά AB και M είναι ένα εξωτερικό σημείο του ρόμβου. Να αποδείξετε ότι :

α). $A\Gamma = B\Delta \cdot \sqrt{3}$.

β). $MA^2 + M\Gamma^2 = 2 \cdot ME^2 + \frac{3}{2} \cdot B\Delta^2$, όπου E είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου.

γ). $MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2 + B\Delta^2$.

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο (O, R) φέρνουμε τις ακτίνες OA και OB ώστε $AOB = 60^\circ$. Στο A φέρνουμε την εφαπτόμενη (ϵ) του κύκλου και από την B κάθετη προς την (ϵ) , που τέμνει την (ϵ) στο Γ .

Να υπολογίσετε (συναρτήσει του R).

α). Τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων του τετράπλευρου $OAGB$.

β). Το εμβαδόν του τετραπλεύρου $OAGB$.

γ). Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

ΘΕΜΑ 1

- α). Να αποδειχθεί ότι κάθε εξίσωση της μορφής : $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$, $B \neq 0$, παριστάνει ευθεία γραμμή.
- β). Να γραφούν οι συνθήκες που πρέπει να πληρούν δύο διανύσματα για να είναι μεταξύ τους παράλληλα.
- γ). Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου και της παραβολής καθώς και τις αντίστοιχες εξισώσεις των εφαπτομένων τους.

ΘΕΜΑ 2

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ γνωρίζουμε ότι : $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = (2, 5)$ τότε :

- α). Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $(2 \cdot \vec{\alpha}) \cdot (-3 \cdot \vec{\beta})$ και $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$
- β). Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το εσωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων \vec{u} και $\vec{\beta}$ με $\vec{u} = (\kappa, \lambda)$ να είναι ίσο με μηδέν.
- γ). Ποια σχέση ικανοποιούν όλα τα διανύσματα \vec{u} της παραπάνω περίπτωσης.

ΘΕΜΑ 3

Να αποδείξετε ότι :

α). $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, για κάθε θετικό ακέραιο n .

β). $n^2 > 2 \cdot n + 1$, για κάθε ακέραιο $n \geq 3$.

γ). $5^n > 5 \cdot n - 1$, για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 3$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία A και B με συντεταγμένες $A = (3, 4)$ και $B = (5, -2)$ όπου είναι τοποθετημένα τα άκρα μιας κεραίας κινητής τηλεφωνίας, για το άλλο άκρο που στηρίζεται η κεραία γνωρίζουμε ότι :

- α). Ισαπέχει από τα άλλα άκρα της κεραίας.
- β). Το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα τρία άκρα της κεραίας είναι ίσο με 10.
- γ). Να βρεθούν τα σημεία που θα τοποθετηθεί το άλλο άκρο της κεραίας και ικανοποιούν τις δύο παραπάνω προϋποθέσεις.