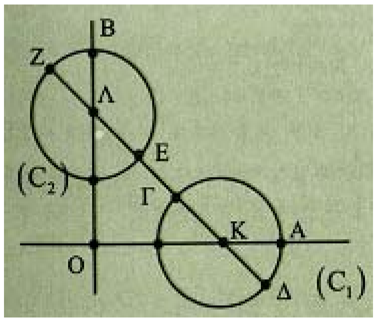
ΘΕΜΑ 1

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $\lvert z-2\rvert = 1$ και $\lvert w-2\cdot i\rvert = 1$.   i). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z και w.   ii). Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί z, w, τέτοιοι, ώστε z = w.   iii).Να αποδείξετε ότι $\lvert z\rvert \le 3$ και $\lvert w\rvert \le 3$.   iv).Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $\lvert z-w\rvert$.

ΛΥΣΗ



Ι). Η εικόνα Μ(z) ανήκει σε κύκλο (C_1) κέντρου $K(2,\ 0)$ και ακτίνας $\rho_1 = 1$, ενώ η εικόνα Ν(w) ανήκει σε κύκλο (C_2) κέντρου $\Lambda(0,\ 2)$ και ακτίνας $\rho_2 = 1$. Είναι $(K\Lambda) = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} > \rho_1 + \rho_2$. Άρα, κάθε κύκλος βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου και συνεπώς δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Επομένως, δεν υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί z, w τέτοιοι, ώστε z = w.

ii). Το σημείο Α(3, 0) του (C_1) απέχει μέγιστη απόσταση από το Ο(0, 0), ενώ το Β(0, 3) του (C_2) απέχει μέγιστη απόσταση από το Ο(0, 0). Επομένως $\lvert z\rvert < (OA)$ και $\lvert w\rvert < (OB)$. Δηλαδή $\lvert z\rvert \le 3$ και $\lvert w\rvert \le 3$.

iv). Μέγιστη τιμή του $\lvert z-w\rvert$ είναι η απόσταση $(\Delta Z) = (K\Lambda) + \rho_1 + \rho_2 = 2\cdot\sqrt{2} + 2 =$
$= 2\cdot(\sqrt{2}+1)$. Ελάχιστη τιμή του $\lvert z-w\rvert$ είναι η απόσταση $(\Gamma E) = (K\Lambda) - \rho_1 - \rho_2 =$
$= 2\cdot\sqrt{2} - 2 = 2\cdot(\sqrt{2}-1)$.

ΘΕΜΑ 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \bar{z} + \lvert z\rvert$, $z \in C$. Να αποδείξετε ότι :   i). $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, για κάθε $z \in C$.   ii). $f(z) \in R$ αν και μόνο αν $z \in R$.   iii).Αν $\lvert z\rvert \le 1$, τότε $\lvert f(z)\rvert \le 2$.   iv). δεν υπάρχει μιγαδικός αριθμός z τέτοιος, ώστε $f(z) = 2\cdot z - 3\cdot i$.

ΛΥΣΗ

i). Είναι $f(\bar{z}) = \bar{\bar{z}} + \lvert\bar{z}\rvert = z + \lvert z\rvert$ και $\overline{f(z)} = \overline{\bar{z} + \lvert z\rvert} = \bar{\bar{z}} + \overline{\lvert z\rvert} = z + \lvert z\rvert - f(\bar{z})$, για κάθε $z \in C$.

ii). Έστω $z = x + y\cdot i$, με $x,\ y \in R$. Οπότε $f(z) = x - y\cdot i + \sqrt{x^2+y^2} + = x + \sqrt{x^2+y^2} - y\cdot i$.
Άρα $f(z) \in R \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z \in R$.

iii). Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα έχουμε : $\lvert f(z)\rvert = \lvert \bar{z} + \lvert z\rvert \rvert \le \lvert\bar{z}\rvert + \lvert z\rvert = 2\cdot\lvert z\rvert \le 2$.

iv). Αν $f(z) = 2\cdot z - 3\cdot i$, τότε είναι $\bar{z} + \lvert z\rvert = 2\cdot z - 3\cdot i$. Θέτοντας $z = x + y\cdot i$ παίρνουμε
$x - y\cdot i + \sqrt{x^2+y^2} = 2\cdot(x + y\cdot i) - 3\cdot i \Rightarrow (x + \sqrt{x^2+y^2}) - y\cdot i = 2\cdot x + (2\cdot y - 3)\cdot i$.
Η τελευταία ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\{\ x + \sqrt{x^2+y^2} = 2\cdot x$ και $-y = 2\cdot y - 3\ \}$ ή
$\{\ \sqrt{x^2+y^2} = x$ και $y = 1\ \}$.
Για $y = 1$ η εξίσωση $\sqrt{x^2+y^2} = x$ ισοδύναμα γράφεται $\sqrt{x^2+1} = x \Rightarrow x^2 + 1 = x^2 \Rightarrow 1 = 0$ και είναι αδύνατη. Επομένως, δεν υπάρχει μιγαδικός αριθμός z με $f(z) = 2\cdot z - 3\cdot i$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει η σχέση $f(f(x)) = f(x) + 2\cdot x - 2$, για κάθε $x \in R$.
i). Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 – 1.
ii).Να βρείτε το f(1).
iii).Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $f(R) = R$ και $f(2) = 3$, τότε :
α). να απόδειξε ότι $f(x) = x - 2 + 2\cdot f^{-1}(x)$, για κάθε $x \in R$.
β). να βρείτε το f(3).
γ). να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

ΛΥΣΗ

i). Για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2)$, έχουμε $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ και $f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2)$.
Λόγω της δοθείσας σχέσης η τελευταία ισότητα γράφεται : $2\cdot x_1 - 2 = 2\cdot x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$.
Άρα η f είναι 1 – 1.

ii). Θέτοντας στη δοθείσα σχέση όπου x το 1 προκύπτει $f(f(1)) = f(1)$.
και επειδή η f είναι 1 – 1 συμπεραίνουμε ότι $f(1) = 1$.

iii). α). Επειδή $f(R) = R$ η f^{-1} ορίζεται σε όλο το R. Θέτοντας στη δοθείσα σχέση όπου x το $f^{-1}(x)$ έχουμε : $f(f(f^{-1}(x))) = f(f^{-1}(x)) + 2\cdot f^{-1}(x) - 2 \Rightarrow f(x) = x + 2\cdot f^{-1}(x) - 2 \Rightarrow f(x) = x - 2 + 2\cdot f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in R$.

β) Έχουμε $f(2) = 3\cdot f^{-1}(3) = 2$. Η σχέση που αποδείξαμε στο ερώτημα α) για $x = 3$ δίνει $f(3) = 3 - 2 + 2\cdot f'(3) = 1 + 4 = 5$, δηλαδή $f(3) = 5$.

γ). Η εξίσωση $f(x) = 2$, ισοδύναμα γράφεται $x = f^{-1}(2)$.
Αρκεί λοιπόν να βρούμε το $f^{-1}(2)$. Προς τούτο θέτουμε στη σχέση του ερωτήματος α) όπου x το 2 και παίρνουμε : $f(2) = 2 - 2 + 2\cdot f^{-1}(2) \Rightarrow 3 = 2\cdot f^{-1}(2) \Rightarrow f^{-1}(2) = \frac{3}{2}$.

Επομένως η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = \frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ 3

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=1$.

i). Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-\lambda x}=3$.

ii).Αν η C_f δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα x′x, να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

iii).Αν η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, να βρείτε:

α). τις ρίζες της εξίσωσης f(x) = 0.

β). το πρόσημο της f.

ΛΥΣΗ

i). Θέτουμε $2\cdot x = \omega \Rightarrow x = \dfrac{\omega}{2}$, Όταν $x \to 0$, τότε $\omega \to 0$.

Έχουμε λοιπόν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=1 \Rightarrow \lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{f(\omega)}{\frac{\omega}{2}}=1 \Rightarrow 2\cdot\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{f(\omega)}{\omega}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$.

Η ισότητα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-\lambda x}=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)}{x}+1}{\frac{f(x)}{x}-\lambda}=3 \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-\lambda}=3 \Rightarrow \dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}-3\lambda \Rightarrow \lambda=0$.

ii). Θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, κοντά στο 0. Επομένως $f(x) = x\cdot g(x)$ κοντά στο 0 και

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0\cdot\dfrac{1}{2} = 0$.

Αν η f ήταν συνεχής, θα ισχύει $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Δηλαδή, η C_f θα είχε κοινό σημείο με τον x′x, το O(0, 0) κάτι που εξ’ υποθέσεως είναι αδύνατον. Άρα η f δεν είναι συνεχής.

iii). α). Επειδή η f είναι συνεχής, ισχύει $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Δηλαδή, το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 και μάλιστα μοναδική, αφού η f ως γνησίως φθίνουσα είναι και 1 – 1.

β) Για $x < 0$ είναι $f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Για $x > 0$ είναι $f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση f : R → R η οποία είναι γνησίως μονότονη, συνεχής και τέτοια, ώστε $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-4}{x-3}=5$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=2$. Να αποδείξετε ότι :

i). η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii). υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιος, ώστε $2\cdot f(x_0) = f(2) + f(e)$.

iii). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2\cdot f(x-2)}{x-3}=1$.

ΛΥΣΗ

i). Θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x)-4}{x-3}$, κοντά στο 3. Οπότε $f(x) = 4 + (x - 3)\cdot g(x)$ κοντά στο 3.

Άρα $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4 + \lim\limits_{x\to 3}(x-3)\cdot \lim\limits_{x\to 3} g(x) = 4 + 0\cdot 5 = 4$.

Επειδή η f είναι συνεχής ισχύει $f(3) = \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$.

Ομοίως, θέτουμε $h(x) = \dfrac{f(x)-2}{x-1}$ κοντά στο 1. Οπότε $f(x) = 2 + (x - 1)\cdot h(x)$ κοντά στο 1.

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 + \lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot \lim\limits_{x\to 1} h(x) = 2 + 0\cdot 2 = 2$.

Επειδή η f είναι συνεχής ισχύει $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$. Έχουμε λοιπόν $1 < 3 \Rightarrow f(1) < f(3)$.

Άρα, η f δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα. Επειδή όμως είναι γνησίως μονότονη, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

ii). Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [1, 3]. Επίσης, παρατηρούμε ότι :

→ $1 < 2 < 3 \Rightarrow f(1) < f(2) < f(3) \Rightarrow 2 < f(2) < 4$.

→ $1 < e < 3\cdot f(1) < f(e) < f(3) \Rightarrow 2 < f(e) < 4$.

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $4 < f(2) + f(e) < 8$, δηλαδή $2 < \dfrac{f(2)+f(e)}{2} < 4$

Επομένως, ο αριθμός $\eta = \dfrac{f(2)+f(e)}{2}$, βρίσκεται μεταξύ των τιμών $f(1) = 2$ και $f(3) = 4$.

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta \Rightarrow f(x_0) = \dfrac{f(2)+f(e)}{2}$. Ο αριθμός x_0 είναι μοναδικός, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii). Έχουμε $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2f(x-2)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{f(x)-4}{x-3}+\dfrac{4-2f(x-2)}{x-3}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-4}{x-3}+\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4-2f(x-2)}{x-3} = 5-2\cdot\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x-2)-2}{x-3}$.

Θέτουμε $x - 2 = y$. Όταν $x \to 3$ τότε $y \to 1$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2f(x-2)}{x-3} = 5-2\cdot\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{f(y)-2}{y-1} = 5 - 2\cdot 2 = 5 - 4 = 1$.

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ με τύπο $f(x) = (x^2 - 4\cdot x + 6)\cdot e^x$, για κάθε $x \in R$.
i). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της fστο σημείο $A(0, f(0))$.
ii). Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.
iii).Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2\cdot x + 6$, για κάθε $x \in R$.
iv).Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ΛΥΣΗ

i). Έχουμε $f'(x) = (x^2 - 4\cdot x + 6)\cdot e^x + (2\cdot x - 4)\cdot e^x = (x^2 - 2\cdot x + 2)\cdot e^x$, για κάθε $x \in R$.
Είναι λοιπόν $f(0) = 6$ και $f'(0) = 2$. Άρα, η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \Rightarrow y - 6 = 2\cdot x \Rightarrow y = 2\cdot x + 6$.

ii). Το τριώνυμο $x^2 - 2\cdot x + 2$ έχει αρνητική διακρίνουσα, και συνεπώς είναι πάντα θετικό.
Άρα ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in R$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα.
Επίσης $f''(x) = (x^2 - 2\cdot x + 2)\cdot e^x + (2\cdot x - 2)\cdot e^x = x^2\cdot e^x \geq 0$, για κάθε $x \in R$.
και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και συνεπώς η f είναι κυρτή.

iii).Επειδή η f είναι κυρτή, η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (ε).
Δηλαδή, ισχύει $f(x) \geq 2\cdot x + 6$, για κάθε $x \in R$.

iv). Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 4\cdot x + 6) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 4\cdot x + 6)\cdot e^x = +\infty$.
Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 4\cdot x + 6)\cdot e^x =$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+6}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2-4x+6\right)'}{\left(e^{-x}\right)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = 0 .$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο R θα έχει σύνολο τιμών το διάστημα
$f(R) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 6

Έστω δύο συναρτήσεις f, g : R → R για τις οποίες ισχύει η σχέση f(x) – g(x) = x – 1, για κάθε x ∈ R.

i). Αν η ευθεία (ε) : y = 2·x – 1, είναι ασύμπτωτη της C_g στο +∞, να βρείτε :

α). το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

β). Την ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

ii).Αν f(0) = f(2) = 0 και η f είναι παραγωγίσιμη με f ′(x) ≠ 1, για κάθε x ∈ R, να αποδείξετε ότι :

α). η g είναι 1 – 1.

β). Η εξίσωση g(x) = 0 έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

ΛΥΣΗ

i). α).Η ευθεία (ε) : y = 2·x – 1, είναι ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-2\cdot x]=-1$.

Από την σχέση f(x) – g(x) = x – 1, για x ≠ 0

Παίρνουμε : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{g(x)}{x}+1-\dfrac{1}{x}$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=2+1=3$.

β). Η δοθείσα σχέση f(x) – g(x) = x – 1 γράφεται f(x) – 3·x = g(x) – 2·x – 1,

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3\cdot x]=\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-2\cdot x]-1=-1-1=-2$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3\cdot x]=-2$.

Άρα, η ευθεία (η) : y = 3·x – 2 είναι ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

iii). α). Για κάθε x ∈ R ισχύει g(x) = f(x) – x + 1. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση g δεν είναι 1 – 1. Δηλαδή ότι υπάρχουν αριθμοί x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ τέτοιοι, ώστε $g(x_1) = g(x_2)$.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη θα είναι και η g παραγωγίσιμη με g ′(x) = f ′(x) – 1, για κάθε x ∈ R.
Άρα, η g ικανοποιεί στο $[x_1, x_2]$ τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.
Οπότε υπάρχει ξ ∈ (x_1, x_2) τέτοιο, ώστε g ′(ξ) = 0. Δηλαδή f ′(ξ) – 1 = 0 ⇒ f ′(ξ) = 1 που είναι άτοπο, αφού ισχύει f ′(x) ≠ 1, για κάθε x ∈ R. Επομένως, η g είναι 1 – 1.

β). Η g ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο διάστημα [0, 2]. Επίσης g(0) = f(0) – 0 + 1 = 1 και g(2) = f(2) – 2 + 1 = –1. Οπότε g(0)·g(2) < 0.
Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση g(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 2). Η ρίζα αυτή είναι η μοναδική πραγματική ρίζα της εξίσωσης g(x) = 0 αφού η συνάρτηση g είναι 1 – 1.

ΘΕΜΑ 7

Έστω συνάρτηση f : R → R η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε f(x) = $2e^{-x}+\int_0^x f(x-t)\cdot dt$, για κάθε x ∈ R. Να αποδείξετε ότι :

i). η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = f(x) - 2\cdot e^{-x}$, για κάθε x ∈ R.

ii).η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}\cdot f(x)$, x ∈ R είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή.

iii).$f(x) = e^{x} + e^{-x}$, για κάθε x ∈ R.

ΛΥΣΗ

i). Σχετικά με το ολοκλήρωμα $\int_0^x f(x-t)\cdot dt$ θέτουμε $x - t = u \Rightarrow t = x - u$.

Επομένως $dt = -du$. Για t = x είναι u = 0 ενώ για t = 0 είναι u = x. Οπότε, έχουμε

$\int_0^x f(x-t)\cdot dt = -\int_x^0 f(u)\cdot du = \int_0^x f(u)\cdot du$, και συνεπώς $f(x) = 2\cdot e^{-x} + \int_0^x f(u)\cdot du$, για κάθε x ∈ R.

Επειδή η f είναι συνεχής στο R η συνάρτηση $\int_0^x f(u)\cdot du$ είναι παραγωγίσιμη. Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = -2\cdot e^{-x} + f(x)$, για κάθε x ∈ R.

ii). Για κάθε x ∈ R έχουμε $g'(x) = e^{-x}\cdot f'(x) - e^{-x}\cdot f(x) = e^{-x}(-2\cdot e^{-x} + f(x)) - e^{-x}\cdot f(x) = -2\cdot e^{-2x} < 0$
Άρα, η g είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης, για κάθε x ∈ R έχουμε $g''(x) = (-2\cdot e^{-2\cdot x})' = 4\cdot e^{-2\cdot x} > 0$.
Άρα, η συνάρτηση g είναι κυρτή.

iii). Για κάθε x ∈ R έχουμε $f'(x) - f(x) = -2\cdot e^{-x}$ ή ισοδύναμα $e^{-x}\cdot(f'(x) - f(x)) = -2\cdot e^{-2\cdot x}$.
Δηλαδή $(e^{-x}\cdot f(x))' = (e^{-2x})'$
Επομένως, υπάρχει σταθερά c ∈ R τέτοια, ώστε $e^{-x}\cdot f(x) = e^{-2\cdot x} + c$, για κάθε x ∈ R

Από τη δοθείσα σχέση προκύπτει ότι $f(0) = 2 + \int_0^0 f(-t)\cdot dt = 2$.

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου x το 0 παίρνουμε $e^0\cdot f(0) = e^0 + c \Rightarrow 2 = 1 + c \Rightarrow c = 1$.
Επομένως $e^{-x}\cdot f(x) = e^{-2x} + 1$ και τελικά $f(x) = e^{-x} + e^{x}$, για κάθε x ∈ R.

ΘΕΜΑ 8

Έστω συνάρτηση f : R → R η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε f(x) = $\int_0^x \frac{1}{f^2(t)+1}\cdot dt$,

για κάθε x ∈ R.

ii). Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα.

ii). Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

iii).Να αποδείξετε ότι $[f(x)]^3 + 3\cdot f(x) = 3\cdot x$, για κάθε x ∈ R.

iv).Αν το σύνολο τιμών της f είναι το f(R) = R, να βρείτε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} και ευθείες y = 0, x = 1.

ΛΥΣΗ

i). Η συνάρτηση $\frac{1}{f^2(t)+1}$ είναι συνεχής στο R. Επομένως, η συνάρτηση $\int_0^x \frac{1}{f^2(t)+1}\cdot dt$.
είναι παραγωγίσιμη στο R. Δηλαδή, η f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$f'(x) = \left(\int_0^x \frac{1}{f^2(t)+1}\cdot dt\right)' = \frac{1}{f^2(x)+1} > 0$, για κάθε x ∈ R. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii). Η συνάρτηση f ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής.

Επομένως $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \int_0^0 \frac{1}{f^2(t)+1}\cdot dt = 0$.

Και το ζητούμενο είναι της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$.

εφαρμόζοντας τον κανόνα De L ‘ Hospital έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{f^2(x)+1} = \frac{1}{f^2(0)+1} = 1.$$

iii). Αποδείξαμε ότι $f'(x) = \frac{1}{f^2(x)+1}$, για κάθε x ∈ R. Δηλαδή $f^2(x)\cdot f'(x) + f'(x) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cdot f^2(x)\cdot f'(x) + 3\cdot f'(x) = 3 \Rightarrow [f^3(x) + 3\cdot f(x)]' = (3\cdot x)'$.

Επομένως, υπάρχει σταθερά c ∈ R τέτοια, ώστε $f^3(x) + 3\cdot f(x) = 3\cdot x + c$, για κάθε x ∈ R.

Για x = 0 έχουμε $f^3(0) + 3\cdot f(0) = c \Rightarrow c = 0$.

Άρα $f^3(x) + 3\cdot f(x) = 3\cdot x$, για κάθε x ∈ R.

iv). Η f ως γνησίως αύξουσα είναι και 1 –1. Επομένως, έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} η οποία ορίζεται σε όλο το R αφού το σύνολο τιμών της f είναι το R. Θέτοντας στη σχέση του ερωτήματος

iii). f(x) = y παίρνουμε $y^3 + 3\cdot y = 3\cdot x \Rightarrow x = \frac{1}{3}\cdot y^3 + y$. Άρα, η f^{-1} έχει τύπο $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 + x =$

$= x\cdot(\frac{1}{3}\cdot x^2 + 1)$, για κάθε x ∈ R.

Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(x) \geq 0$, για κάθε x ∈ [0, 1]. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδό δίνεται από τον

τύπο E = $\int_0^1 f^{-1}(x)\cdot dx$ Δηλαδή E = $\int_0^1 f^{-1}(x)\cdot dx = \int_0^1\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\cdot dx = \left[\frac{x^4}{12}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}+\frac{1}{2} = \frac{7}{12}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 9

Έστω συνάρτηση f : R → R η οποία είναι συνεχής και ο μιγαδικός αριθμός $z=\int_1^x f(t)\cdot dt+i\cdot\int_1^x f(t)\cdot dt$, x ∈ R, για τον οποίο ισχύει η σχέση |z +1 − i| = |z|, για κάθε x ∈ R.Να αποδείξετε ότι :

i). οι εικόνες των z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στην ευθεία (ε) : y = x + 1.

ii). $\int_0^1 f(t)\cdot dt=1$.

iii). Η συνάρτηση g(x) = x − $\int_0^x f(t)\cdot dt$, x ∈ R, ικανοποιεί σε κάποιο διάστημα του R τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

iv). υπάρχει ξ ∈ R τέτοιο, ώστε f(ξ) = 1.

ΛΥΣΗ

i). Έστω z = x + y·i, και M(x, y) η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο. Η σχέση |z + 1 − i| = |z| ισοδύναμα γράφεται |x + 1) + (y − 1)·i| = |x + y·i| ⇒ $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

⇒ $x^2 + 2\cdot x + 1 + y^2 - 2\cdot y + 1 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = x + 1$. Άρα, οι εικόνες των z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στην ευθεία (ε) : y = x + 1.

ii). Οι εικόνες των z είναι τα σημεία της μορφής $M\left(\int_1^x f(t)\cdot dt,\int_0^x f(t)\cdot dt\right)$.

Επειδή, τα σημεία αυτά ανήκουν στην ευθεία (ε) ισχύει $\int_0^x f(t)\cdot dt=\int_1^x f(t)\cdot dt+1$

Δηλαδή $\int_0^x f(t)\cdot dt-\int_1^x f(t)\cdot dt=1\Rightarrow\int_0^x f(t)\cdot dt+\int_x^1 f(t)\cdot dt=1\Rightarrow\int_0^1 f(t)\cdot dt=1$.

iii). Επειδή η f είναι συνεχής στο R, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\cdot dt$, είναι παραγωγίσιμη με $\left(\int_0^x f(t)\cdot dt\right)' = f(x)$, για κάθε x ∈ R. Άρα, και η συνάρτηση

g(x) = x − $\int_0^x f(t)\cdot dt$ είναι παραγωγίσιμη με g ′(x) = 1 − f(x), για κάθε x ∈ R.

Επίσης g(0) = 0 − $\int_0^0 f(t)\cdot dt$ = 0 και g(1) = 1 − $\int_0^1 f(t)\cdot dt$ = 1 −1 = 0.

Επομένως g(0) = g(1), Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [0, 1].

iv). Από την εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση g στο διάστημα [0, 1] προκύπτει ότι υπάρχει ξ ∈ (0, 1) τέτοιο, ώστε g ′(ξ) = 0, δηλαδή 1 − f(ξ) = 0 ⇒ f(ξ) = 1.

ΘΕΜΑ 10

Έστω η συνάρτηση f : [0, +∞) με $f(x) = 2\cdot x + e^x$.
α). Να δείξετε ότι για κάθε α, β ∈ [0, +∞) ισχύει $|f(\beta) - f(\alpha)| \geq 3\cdot|\beta - \alpha|$.
β). Να δείξετε ότι $\int_1^{e+2} f^{-1}(x)\cdot dx = 2$.
γ). Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση g : [0, +∞) για την οποία ισχύουν :
$g(0) = -\frac{3}{2}$ και $g(x) + g'(x) = f(x)$, για κάθε $x \geq 0$.

ΛΥΣΗ

α). Για α = β η ζητούμενη σχέση ισχύει σαν ισότητα.
Έστω α, β ε [0, +∞), με α < β. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στο [α, β] έχουμε ότι υπάρχει
$\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε : $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, όμως $f'(x) = 2 + e^x > 0$, άρα $2 + e^\xi = \frac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{|\beta-\alpha|}$.
Είναι $\xi > 0 \Rightarrow e^\xi > e^0 \Leftrightarrow e^\xi > 1 \Leftrightarrow e^\xi + 2 > 3$, άρα $\frac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{|\beta-\alpha|} > 3 \Leftrightarrow |f(\beta) - f(\alpha)| \geq 3\cdot|\beta - \alpha|$.
Τελικά για κάθε α, β ∈ [0, +∞) ισχύει $|f(\beta) - f(\alpha)| \geq 3\cdot|\beta - \alpha|$.

β). Θέτουμε x = f(t), οπότε :
Για x = 1 είναι $f(1) = 1 \Leftrightarrow f(t) = f(0) \Leftrightarrow t = 0$.
Για x = e + 2 είναι $f(t) = e + 2 \Leftrightarrow f(t) = f(1) \Leftrightarrow t = 1$.
Επίσης είναι $dx = f(f(t)) \Rightarrow dx = f'(t)\cdot dt$. Το ολοκλήρωμα γίνεται :
$I = \int_1^{e+2} f^{-1}(x)\cdot dx = \int_1^1 f^{-1}(f(t))\cdot f'(t)\cdot dt$. Γνωρίζουμε όμως ότι : $f^{-1}(f(t)) = t$, άρα έχουμε :
$I = \int_0^1 t\cdot f^{-1}(t)\cdot dt \overset{\pi\alpha\rho\alpha\gamma.}{=} \left[t\cdot f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f(t)\cdot dt = \left[t\cdot f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 (2t + e^t)\cdot dt = f(1) - \left[t^2 + e^t\right]_0^1 =$
$= e + 2 - (1 + e - 1) = 2$.

γ). Έχουμε : $g(x) + g'(x) = f(x) \Rightarrow g(x) + g'(x) = 2\cdot x + e^x \Rightarrow g(x)\cdot e^x + g'(x)\cdot e^x = 2\cdot x\cdot e^x + e^{2\cdot x} \Rightarrow$
$\Rightarrow (g(x)\cdot e^x)' = 2\cdot x\cdot e^x + e^{2\cdot x}$ και περνώντας στο αόριστο ολοκλήρωμα έχουμε :
$\int (g(x)\cdot e^x)'\cdot dx = \int (2x\cdot e^x + e^{2x})\cdot dx \Rightarrow g(x)\cdot e^x = \int 2x\cdot e^x\cdot dx + \int e^{2x}\cdot dx \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x)\cdot e^x = 2x\cdot e^x - 2\cdot e^x + \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + c$.
Για x = 0 έχουμε $g(0)\cdot e^0 = -2\cdot e^0 + \frac{1}{2}\cdot e^0 + c \Rightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} + c \Rightarrow c = 0$, οπότε
έχουμε $g(x)\cdot e^x = 2\cdot x\cdot e^x - 2\cdot e^x + \frac{1}{2}\cdot e^{2x} \Rightarrow g(x) = 2\cdot x - 2 + \frac{1}{2}e^x$.