ΘΕΜΑ 11

Έστω οι συναρτήσεις f , g με $f(x) = 2\cdot e^x - 1$ και $g(x) = 2\cdot \ln(x + 1) + 1$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο. Στη συνέχεια να δείξετε ότι στο σημείο αυτό έχουν κοινή εφαπτόμενη, την οποία και να βρείτε.

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f = R$ και της συνάρτησης g είναι $A_g = (-1, +\infty)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο $h(x) = f(x) - g(x) \Leftrightarrow h(x) = 2\cdot e^x - 1 - 2\cdot \ln(x + 1) - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow h(x) = 2\cdot e^x - 2\cdot \ln(x + 1) - 2$. Παρατηρούμε ότι $h(0) = 2\cdot e^0 - 2\cdot \ln 1 - 2 = 2 - 2 = 0$.

Επιπλέον είναι $h'(x) = 2\cdot e^x - 2\cdot \frac{1}{x+1} = 2\cdot (e^x - \frac{1}{x+1})$.

Για να προσδιορίσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης η πρέπει να βρούμε το πρόσημο της h′, το οποίο εξαρτάται από τη συνάρτηση $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$. Έχουμε $\varphi'(x) = e^x + \frac{1}{\left(x+1\right)^2} > 0$,

για κάθε $x \in (-1, +\infty)$.

Επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα. Όμως $\varphi(0) = 0$. Άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει $\Phi(x) > \varphi(0) = 0$ και για κάθε $x < 0$ ισχύει $\varphi(x) < \varphi(0) = 0$. Επομένως :

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$+$
$h(x)$	↘		↗
		$h(0) = 0$	

→ Αν $-1 < x < 0$, τότε $h(x) > h(0) = 0$. Άρα $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$.
→ Αν $0 < x$, τότε $h(x) > h(0) = 0$. Άρα $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Συμπεραίνουμε ότι το $x_0 = 0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $h(x) = 0$.
Οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτόμενη στη θέση $x_0 = 0$, αν ισχύει $f(0) = g(0)$ και $f'(0) = g'(0)$.
Έχουμε ότι $f(0) = 2\cdot e^0 - 1 = 2 - 1 = 1$ και $g(0) = 2\cdot \ln(0 + 1) + 1 = 2\cdot \ln 1 + 1 = 1$, άρα $f(0) = g(0)$.

Επιπλέον $f'(x) = 2\cdot e^x$ και $g'(x) = 2\cdot \frac{1}{x+1}$. Ισχύει $f'(0) = 2\cdot e^0 = 2$ και $g'(0) = 2\cdot \frac{1}{0+1} = 2$, δηλαδή $f'(0) = g'(0)$.

Συνεπώς οι γραφικές παραστάσεις και C_g έχουν κοινή εφαπτόμενη στο σημείο $x_0 = 0$, την ευθεία $y - 1 = 2\cdot x \Rightarrow y = 2\cdot x + 1$.

ΘΕΜΑ 12

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x - \ln x + e^x$, $x \geq 1$.
α). Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
β). Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
γ). Να δείξετε ότι η εξίσωση : $f(x + e^x) = f(\ln x + 2009)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[1, +\infty)$.
δ). Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_1^e f(x)\cdot dx + \int_{1+e}^{e^e+e-1} f^{-1}(x)\cdot dx$.

ΛΥΣΗ

α). Είναι $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + e^x = \frac{x-1}{x} + e^x > 0$ για κάθε $x \geq 1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A = [1, +\infty)$.

β). Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο διάστημα $A = [1, +\infty)$ έχουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το σύνολο $f(A) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x))$.

Όμως:
$\rightarrow f(1) = e + 1$.
$\rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x - \ln x + e^x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{e^x}{x}\right) \quad (1)$

$\rightarrow$ και επειδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DHL}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad\rightarrow$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DHL}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$

έχουμε τελικά από την (1) ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\cdot(1 - 0 + \infty) = +\infty$, επομένως $f(A) = [e + 1, +\infty)$.

γ). Επειδή η συνάρτηση f είναι 1 – 1, η σχέση $f(x + e^x) = f(\ln x + 2009)$ συνεπάγεται ότι $x + e^x = \ln x + 2009 \Leftrightarrow x - \ln x + e^x = 2009 \Leftrightarrow f(x) = 2009$. Όμως ο αριθμός 2009 ανήκει στο σύνολο τιμών της f, δηλαδή $2009 \in f(A)$, οπότε από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών έχουμε σαν συμπέρασμα ότι υπάρχει $\xi > 1$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2009$, και επειδή η συνάρτηση f είναι «1–1» το ξ είναι μοναδικό.

δ). Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα : $I = \int_1^e f(x)\cdot dx + \int_{1+e}^{e^e+e-1} f^{-1}(x)\cdot dx$, πρώτα θα κάνουμε αλλαγή στη μεταβλητή στο ολοκλήρωμα $K = \int_{1+e}^{e^e+e-1} f^{-1}(x)\cdot dx$

θέτοντας $x = f(u)$, οπότε : $\rightarrow dx = d(f(u)) \Rightarrow dx = f'(u)\cdot du$.
$\rightarrow$ όταν $x = 1 + e$, έχουμε $1 + e = f(u) \Rightarrow f(1) = f(u) \Rightarrow u = 1$.
$\rightarrow$ όταν $x = e^e + e - 1$, έχουμε $e^e + e - 1 = f(u) \Rightarrow f(e) = f(u) \Rightarrow u = e$, άρα

$$K = \int_{1+e}^{e^e+e-1} f^{-1}(x)\cdot dx = \int_1^e f^{-1}(f(u))\cdot f'(u)\cdot du = \int_1^e u\cdot f'(u)\cdot du = \left[u\cdot f(u)\right]_1^e - \int_1^e f(u)\cdot du =$$

$$= e^2 - e + e^{e+1} - 1 - e - \int_1^e f(u)\cdot du = e^2 - 2e + e^{e+1} - 1 - \int_1^e f(x)\cdot dx$$

Άρα : $I = \int_1^e f(x)\cdot dx + \int_{1+e}^{e^e+e-1} f(x)\cdot dx = \int_1^e f(x)\cdot dx + e^2 - 2e + e^{e+1} - 1 - \int_1^e f(x)\cdot dx \Rightarrow$
$\Rightarrow I = e^2 - 2\cdot e + e^{e+1} - 1$.

ΘΕΜΑ 13

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : [α, β] → R με 0 < α < β, για την οποία ισχύει η σχέση $x\cdot f'(x) > f(x)$ για κάθε x ∈ [α, β]. Να αποδείξετε ότι :

α). η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, x ∈ [α, β] είναι γνησίως αύξουσα.

β). $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}\cdot x < f(x) < \dfrac{f(\beta)}{\beta}\cdot x$, x ∈ [α, β].

γ). υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 ∈ [α, β], ώστε $f(x_0) = \dfrac{2x_0}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\int_\alpha^\beta f(x)\cdot dx$.

ΛΥΣΗ

α). Για κάθε x ∈ [α, β] ισχύει $g'(x) = \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = \dfrac{x\cdot f'(x)-f(x)}{x^2} \overset{\upsilon\pi o\theta.}{>} 0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.

β). Επειδή η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο [α, β] για κάθε α ≤ x ≤ β, θα ισχύει $g(\alpha) \le g(x) \le g(\beta)$, δηλαδή $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} \le \dfrac{f(x)}{x} \le \dfrac{f(\beta)}{\beta}$ άρα $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}\cdot x \le f(x) \le \dfrac{f(\beta)}{\beta}\cdot x$ (αφού 0 < α ≤ β, άρα x > 0).

γ). Από το προηγούμενο ερώτημα για κάθε x ∈ [α, β] έχουμε διαδοχικά :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha}\cdot x \le f(x) \quad \text{και} \quad f(x) \le \frac{f(\beta)}{\beta}\cdot x$$

$$f(x)-\frac{f(\alpha)}{\alpha}\cdot x \ge 0 \quad \text{και} \quad \frac{f(\beta)}{\beta}\cdot x - f(x) \ge 0$$

$$\int_\alpha^\beta\left[f(x)-\frac{f(\alpha)}{\alpha}\cdot x\right]\cdot dx \ge 0 \quad \text{και} \quad \int_\alpha^\beta\left[\frac{f(\beta)}{\beta}\cdot x - f(x)\right]\cdot dx \ge 0$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\cdot dx \ge \frac{f(\alpha)}{\alpha}\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} \quad \text{και} \quad \frac{f(\beta)}{\beta}\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} \ge \int_\alpha^\beta f(x).$$

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha}\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} \le \int_\alpha^\beta f(x)\cdot dx \le \frac{f(\beta)}{\beta}\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} \le \frac{2}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\int_\alpha^\beta f(x)\cdot dx \le \frac{f(\beta)}{\beta} \Rightarrow g(\alpha) \le \frac{2}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\int_\alpha^\beta f(x)\cdot dx \le g(\beta) \quad \text{(ερώτημα (α))}$$

Παρατηρούμε ότι η g είναι συνεχής (σαν πηλίκο συνεχών) και γνησίως αύξουσα, οπότε ισχύει g(α) < g(β). Επομένως από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών συμπεραίνουμε ότι θα υπάρχει κάποιο x_0 ∈ [α, β] ώστε $g(x_0) = \dfrac{2}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\int_\alpha^\beta f(x)\cdot dx$ ή $\dfrac{f(x_0)}{x_0} = \dfrac{2}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\int_\alpha^\beta f(x)\cdot dx$

άρα $f(x_0) = \dfrac{2x_0}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\int_\alpha^\beta f(x)\cdot dx$.

ΘΕΜΑ 14

Έστω ο μιγαδικός αριθμός z ∈ C, με Im(z) = 1.
Θεωρούμε τη συνάρτηση f : R → R με f(x) = x – ln(e^x^ + |z|).
α). Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
β). Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τη καμπυλότητα.
γ). Να δειχθεί ότι για κάθε x ∈ R, ισχύει ότι : $\dfrac{|z|}{e^{x+1}+|z|} < f(x+1) - f(x) < \dfrac{|z|}{e^{x}+|z|}$.
δ). Να βρεθεί ο μιγαδικός z αν ισχύει ότι : $\int_0^1 \left[x^2\cdot f'(x)+2x\cdot f(x)\right]\cdot dx = -\ln 2$.

ΛΥΣΗ

α). $f(x) = x - \ln(e^x + |z|) \Rightarrow f(x) = \ln e^x - \ln(e^x + |z|) \Rightarrow f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+|z|}\right)$.

Αν θέσουμε $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x+|z|}$, έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+|z|} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{|z|}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{|z|}{e^x}} = 1.$$

Οπότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x)) = 0$.

β). Αφού Im(z) = 1, δηλαδή z = α + i, α ∈ R ⇒ $|z| = \sqrt{\alpha^2+1} > 0$.

→ $f(x) = x - \ln(e^x + |z|) \Rightarrow f'(x) = (x)' - \dfrac{1}{e^x+|z|}\cdot\left(e^x+|z|\right)' = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+|z|} = \dfrac{e^x+|z|-e^x}{e^x+|z|} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{|z|}{e^x+|z|} > 0$, για κάθε x ∈ R, οπότε η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο R.

$f''(x) = \left(\dfrac{|z|}{e^x+|z|}\right)' = -|z|\cdot\dfrac{e^x}{\left(e^x+|z|\right)^2} < 0$, άρα η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα κάτω (κυρτή) στο R

γ). Σχόλιο
Επειδή στην προς απόδειξη σχέση έχουμε τη διαφορά των τιμών της συνάρτησης σε δυο θέσεις (f(x + 1) – f(x)), θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ στο διάστημα [x, x + 1], οπότε :
Αφού λοιπόν η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [x, x + 1], υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ ∈ (x, x + 1) ώστε να ισχύει : $f'(\xi) = \dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Rightarrow f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ ∈ (x, x + 1) ώστε να ισχύει : $f'(\xi) = \dfrac{|z|}{e^{\xi}+|z|} = f(x+1) - f(x)$.

Όμως η συνάρτηση f ′ είναι γνήσια φθίνουσα (f ′′(x) < 0), οπότε αφού

$x < \xi < x+1 \Rightarrow f'(x+1) < f'(\xi) < f(x) \Rightarrow \dfrac{|z|}{e^{x+1}+|z|} < f(x+1) - f(x) < \dfrac{|z|}{e^{x}+|z|}$.

δ). $\int_0^1 \left[x^2\cdot f'(x)+2x\cdot f(x)\right]\cdot dx = -\ln 2 \Rightarrow \int_0^1 \left[x^2\cdot f(x)\right]'\cdot dx = -\ln 2 \Rightarrow \left[x^2\cdot f(x)\right]_0^1 = -\ln 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1) = -\ln 2 \Rightarrow 1 - \ln(e + |z|) = -\ln 2 \Rightarrow \ln e - \ln(e + |z|) = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow \ln\frac{e}{e+|z|} = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{e}{e+|z|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |z| = e \Rightarrow \sqrt{\alpha^2+1} = e \Rightarrow \alpha^2 + 1 = e^2 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{e^2-1}$. Άρα : $z = \pm\sqrt{\alpha^2-1} + i$.

ΘΕΜΑ 15

Αν $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ και $z^2 = z_1 \cdot z_2$ να δείξετε ότι : $|z_1| + |z_2| = \left|\frac{z_1+z_2}{2} + z\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2} - z\right|$

ΛΥΣΗ

Έχουμε : $z^2 = z_1 \cdot z_2 \Leftrightarrow z_1 = \frac{z^2}{z_2}$, οπότε :

$$\left|\frac{z_1+z_2}{2} + z\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2} - z\right| = \left|\frac{\frac{z^2}{z_2}+z_2}{2} + z\right| + \left|\frac{\frac{z^2}{z_2}+z_2}{2} - z\right| = \left|\frac{z^2+z_2^2+2z\cdot z}{2\cdot z_2} + z\right| + \left|\frac{z_1^2+z^2-2z_2\cdot z}{2\cdot z_2}\right| = =$$

$$= \left|\frac{(z+z_2)^2}{2z^2}\right| + \left|\frac{(z-z_2)^2}{2z_2^2}\right| = \frac{|z+z_2|^2+|z-z_2|^2}{2|z_2|} = \frac{(z+z_2)(\overline{z}+\overline{z_2})+(z-z_2)(\overline{z}-\overline{z_2})}{2|z_2|} =$$

$$= \frac{2z\cdot\overline{z}+2\overline{z_2}}{2|z_2|} = \frac{2z\cdot\overline{z}+z_2\cdot\overline{z_2}}{|z_2|} = \frac{|z|^2+|z_2|^2}{|z_2|} = \left|\frac{z}{z_2}\right|^2 + |z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

ΘΕΜΑ 16

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f :(0, +∞) → R με $\int_2^3 f(x\cdot t)\cdot dt \geq \int_2^3 f(t)\cdot dt$,για κάθε x > 0.

Αν f(3) = 2 και f(2) = 1, να αποδειχθεί ότι $\int_2^3 f(x)\cdot dx = 4$.

ΛΥΣΗ

Έστω g(x) = $\int_2^3 f(x\cdot t)\cdot dt - \int_2^3 f(t)\cdot dt$, x > 0. Θέτουμε x·t = y και βρίσκουμε

$\int_2^3 f(x\cdot t)\cdot dt = \frac{1}{x}\cdot\int_{2x}^{3x} f(y)\cdot dy$.

Άρα g(x) = $\frac{1}{x}\cdot\int_{2x}^{3x} f(t)\cdot dt - \int_2^3 f(t)\cdot dt$, x > 0.

Απ' την υπόθεση είναι g(x) > 0 = g(1), για κάθε x > 0. Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat πρέπει

g ′(1) = 0. Έστω F αρχική της f. Τότε g(x) = $\frac{1}{x}$·[F(3·x) − F(2·x)] − $\int_2^3 f(t)\cdot dt$.

Παραγωγίζουμε : g ′(x) = − $\frac{1}{x^2}$·[F(3·x) − F(2·x)] + $\frac{1}{x}$·[3·f(3·x) − 2·f(2·x)]

Άρα g ′(1) = 0 ⇒ −[F(3) − F(2)] + 3·f(3) − 2·f(2) = 0 ⇔ F(3) − F(2) = 6 − 2 ⇒ $\int_2^3 f(x)\cdot dx = 4$.

ΘΕΜΑ 17

Έστω η συνεχής συνάρτηση f : (0, +∞) → R. για την οποία ισχύει f(x) = $\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{f(t)+t}{t^2+1} \cdot dt$, για κάθε x ∈ (0, +∞). Να αποδείξετε ότι :

α). Η f είναι παραγωγίσιμη,

β). f(x) = lnx, x > 0.

ΛΥΣΗ

α). Για κάθε x > 0 ισχύει :

$$f(x) = \int_{1}^{x} \frac{f(t)+t}{t^2+1} \cdot dt + \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{f(t)+t}{t^2+1} \cdot dt \Leftrightarrow f(x) = \int_{1}^{x} \frac{f(t)+t}{t^2+1} \cdot dt - \int_{1}^{\frac{1}{x}} \frac{f(t)+t}{t^2+1} \cdot dt$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη σαν διαφορά παραγωγίσιμων με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)+x}{x^2+1} - \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\left(\frac{1}{x}\right)' \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)+x}{x^2+1} - \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)+x}{x^2+1} + \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1} + \frac{x+\frac{1}{x}}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1} + \frac{1}{x} \quad (1)$$

β). Από τη σχέση της υπόθεσης θέτοντας για κάθε x > 0 όπου x το $\frac{1}{x}$ βρίσκουμε :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{x}^{\frac{1}{x}} \frac{f(t)+t}{t^2+1} \cdot dt = -\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{f(t)+t}{t^2+1} \cdot dt = -f(x), \text{ άρα } f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0 \text{ για κάθε } x > 0 \quad (2)$$

Άρα η σχέση (1) από τη (2) για κάθε x > 0 γίνεται :

$f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = (\ln x)' \Leftrightarrow f(x) = \ln x + c \in R$, c σταθερά (3)

Επίσης από τη σχέση της υπόθεσης με x = 1, βρίσκουμε f(1) = 0.

Επομένως και η σχέση (3) με x = 1 γράφεται : f(1) = ln1 + c, c = 0 = 0 + c ⇒ c = 0.

Άρα με c = 0 η σχέση (3) μας δίνει f(x) = lnx, x > 0.

ΘΕΜΑ 18

Έστω $f : R \to R$ συνάρτηση συνεχής με $f(1) = 1$ και $z \in C - \{1\}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$g : R \to R : g(x) = \int_x^{x^2} |z-1| \cdot f(t) \cdot dt - \left|z - \frac{1}{z}\right| \cdot (x-1)$.

α). Να βρείτε τον $g'(1)$.

β). Αν $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι : $|z - 1| = \left|z - \frac{1}{z}\right|$.

γ). Να δείξετε ότι : $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$.

ΛΥΣΗ

α). $g(x) = \int_x^{x^2} |z-1| \cdot f(t) \cdot dt - \left|z - \frac{1}{z}\right| \cdot (x-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow g(x) = \int_x^{0} |z-1| \cdot f(t) \cdot dt + \int_0^{x^2} |z-1| \cdot f(t) \cdot dt - \left|z - \frac{1}{z}\right| \cdot (x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = \int_0^{x^2} |z-1| \cdot f(t) \cdot dt - \int_0^{x} |z-1| \cdot f(t) \cdot dt - \left|z - \frac{1}{z}\right| \cdot (x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = |z-1| \cdot f\left(x^2\right) \cdot 2x - |z-1| \cdot f(x) - \left|z - \frac{1}{z}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2x \cdot |z-1| \cdot f\left(x^2\right) - |z-1| \cdot f(x) - \left|z - \frac{1}{z}\right|$$

$$\Rightarrow g'(x) = |z-1| \cdot \left[2x \cdot f\left(x^2\right) - f(x)\right] - \left|z - \frac{1}{z}\right|$$

Οπότε $g'(1) = |z - 1| \cdot [2 \cdot f(1) - f(1)] - \left|z - \frac{1}{z}\right| \overset{f(1)=1}{=} = |z-1| - \left|z - \frac{1}{z}\right|$.

β). Ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$. Όμως $g(1) = 0$, άρα τελικά ισχύει ότι $g(x) \geq g(1)$ για κάθε $x \in R$, οπότε το $g(1)$ είναι ολικό ελάχιστο της συνάρτησης g και επειδή παρουσιάζεται σε εσωτερικό σημείο του πεδίο ορισμού της g στο οποίο είναι παραγωγίσιμη, από το θεώρημα του Fermat θα έχουμε $g'(1) = 0 \Rightarrow |z - 1| = \left|z - \frac{1}{z}\right|$.

γ). $|z-1| = \left|z - \frac{1}{z}\right| \Rightarrow |z-1| = \left|\frac{z^2-1}{z}\right| \Rightarrow |z-1| = \frac{\left|z^2-1\right|}{|z|} \Rightarrow |z-1| = \frac{|z-1||z+1|}{|z|}$ και επειδή $z \neq 1$ έχουμε τελικά $|z - 1| \neq 0$, οπότε απλοποιώντας έχουμε τελικά ότι :

$$1 = \frac{|z+1|}{|z|} \Rightarrow |z| = |z+1| \Rightarrow |z|^2 = |z+1|^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (z+1)\left(\bar{z}+1\right) \Rightarrow z \cdot \bar{z} = z \cdot \bar{z} + +z + \bar{z} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z + \bar{z} = 1 \Rightarrow 2 \cdot \mathrm{Re}(z) = -1 \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 19

Έστω η f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[1, +\infty)$ με $f(x) > 0$, για κάθε $x > 1$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις : $G(x) = \int_1^x t^2 \cdot f(t) \cdot dt$, $x \geq 1$ και $H(x) = \int_1^x t \cdot f(t) \cdot dt$, $x \geq 1$

α). Να δείξετε ότι η συνάρτηση : $F(x) = \dfrac{G(x)}{H(x)}$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

β). Θεωρούμε τη συνάρτηση P : $P(x) = x \cdot H(x) - G(x)$,$x > 1$.

Να δείξετε ότι :

i). $P(x) > 0$ για κάθε $x > 1$.

ii).Η συνάρτηση P(x) είναι κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$.

γ). Να βρεθεί το όριο : $L = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{H(x) \cdot \int_1^{x^2} \ln t \cdot dt}{G(x) \cdot (x-1)^2}$.

ΛΥΣΗ

α). Έχουμε : $F'(x) = \dfrac{G'(x) \cdot H(x) - H'(x) \cdot G(x)}{H^2(x)} = \dfrac{x^2 \cdot f(x) \cdot \int_1^x t \cdot f(t) \cdot dt - x \cdot f(x) \cdot \int_1^x t^2 \cdot f(t) \cdot dt}{H^2(x)}$

$= \dfrac{x \cdot f(x) \cdot \left[x \cdot \int_1^x t \cdot f(t) \cdot dt - \int_1^x t^2 \cdot f(t) \cdot dt \right]}{H^2(x)}$, $x > 1$.

Είναι φανερό ότι το πρόσημο της $F'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης

$x \cdot \int_1^x t \cdot f(t) \cdot dt - \int_1^x t^2 \cdot f(t) \cdot dt$. Είναι :

$$x \cdot \int_1^x t \cdot f(t) \cdot dt - \int_1^x t^2 \cdot f(t) \cdot dt = \int_1^x x \cdot t \cdot f(t) \cdot dt - \int_1^x t^2 \cdot f(t) \cdot dt = \int_1^x t \cdot f(t) \cdot (x-t) \cdot dt$$

Όμως για κάθε t, με $1 \leq t \leq x$ είναι $t \cdot (x - t) \geq 0$ άρα και $t \cdot f(t) \cdot (x - t) \geq 0$ συνεπώς

$\int_1^x t \cdot f(t) \cdot dt \geq 0$ άρα και $F'(x) \geq 0$ οπότε η F είναι $\nearrow$ στο $(1, +\infty)$.

β). i). Είναι : $P'(x) = H(x) + x \cdot H'(x) - G'(x) \Rightarrow P'(x) = H(x) + x^2 \cdot f(x) - x^2 \cdot f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow P'(x) = H(x) > 0$, για κάθε $x > 1$ άρα η P(x) είναι $\nearrow$ στο $[1, +\infty)$ συνεπώς

$P(x) \geq P(1) \Leftrightarrow P(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$.

ii). Έχουμε : $P''(x) = H'(x) \Rightarrow P''(x) = x \cdot f(x) > 0$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

Είναι : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{H(x)}{G(x)} \underset{DHL}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{H'(x)}{G'(x)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x \cdot f(x)}{x^2 \cdot f(x)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x} = 1$

Ακόμη : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\int_1^{x^2} \ln t \cdot dt}{(x-1)^2} \underset{DHL}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x \cdot \ln x^2}{2(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x \cdot \ln x}{x-1} \underset{DHL}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 1^+} (2x \cdot \ln x + 2) = 2$.

άρα $L = 1 \cdot 2 = 2$.

ΘΕΜΑ 20

Δίνονται οι μιγαδικοί z και η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(0) = 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = \int_0^x |z-3i| \cdot f(t) \cdot dt - |z+i| \cdot x^2 - 2 \cdot x$. Αν $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$, τότε :

α). Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε κύκλο με κέντρο K(0, 3) και ακτίνα ίση με 2.

β). Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|z-4|$.

ΛΥΣΗ

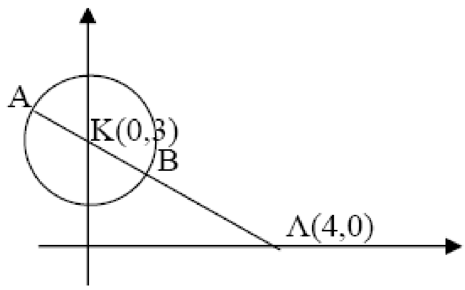
α). $g(0) = \int_0^0 |z-3i| \cdot f(t) \cdot dt - |z+i| \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$, άρα έχουμε ότι $g(x) \geq g(0)$, οπότε από το θεώρημα του Fermat έχουμε ότι $g'(0) = 0$.

Όμως $g(x) = \int_0^x |z-3i| \cdot f(t) \cdot dt - |z+i| \cdot x^2 - 2 \cdot x \mid \Leftrightarrow g'(x) = |z - 3 \cdot i| \cdot f(x) - 2 \cdot x \cdot |z + i| - 2$.

Άρα $g'(0) = 0 \Rightarrow g'(0) = |z - 3 \cdot ı| \cdot f(0) - 2 = 0 \Rightarrow |z - 3 \cdot i| = 2$, άρα η εικόνα του μιγαδικού στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε κύκλο με κέντρο K(0, 3) και ακτίνα ίση με 2.

β).Ο μιγαδικός z είναι ένα σημείο του κύκλου κέντρου K(0, 3) και ακτίνας ρ = 2.

Αναζητάμε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της παράστασης $|z-4|$, που είναι τα τμήματα ΒΛ και ΑΛ.



$ΚΛ = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2} = 5$, οπότε : ΒΛ = ΚΛ – ρ = 5 – 2 = 3. ΑΛ = ΚΛ + ρ = 5 + 2 = 7.

Πολυχρονιάδης Νικόλαος
http://uder.flo.sch.gr/nikpol