ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2000

ΜΑΙΟΣ 2000
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 2

Α). Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{5+i}{2+3\cdot i}$

α). Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha + \beta\cdot i$, $\alpha, \beta \in R$. Μονάδες 4

β). Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή. Μονάδες 5

Στις ερωτήσεις γ), δ) να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό του θέματος και της κάθε ερώτησης και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

γ). Αν $\theta = \text{Arg}z$, τότε ο μιγαδικός αριθμός $i\cdot z$ έχει όρισμα:

[Α]. $\dfrac{\pi}{4} - \theta$ [Β]. $\dfrac{\pi}{2} + \theta$ [Γ]. $\theta - \dfrac{\pi}{2}$ [Δ]. $\pi + \theta$ Μονάδες 3

δ). Το z^4 είναι ίσο με:

[Α]. 4 [Β]. $4\cdot i$ [Γ]. $-4\cdot i$ [Δ]. -4 Μονάδες 3

Β). Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει: $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1$. Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

Α). α). $z = \dfrac{5+i}{2+3\cdot i} = z = \dfrac{5+i \quad 2-3\cdot i}{2+3\cdot i \quad 2-3\cdot i} = \dfrac{13-13\cdot i}{13} = 1 - i$.

β). $z = 1 - i = \sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\cdot\eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

γ). $i\cdot z = i\cdot(1 - i) = 1 + i \Rightarrow \text{Arg}(i\cdot z) = \pi/4 \rightarrow$ [Β]

δ). $z^4 = (1 - i)^4 = [(1 - i)^2]^2 = (-2\cdot i)^2 = -4 \rightarrow$ [Δ].

Β). $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Rightarrow \dfrac{|z-1|}{|z-i|} = 1 \Rightarrow |z - 1| = |z - i|$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, με Α (1, 0) και Β (0, 1), η διχοτόμος της γωνίας xOy, με εξίσωση y = x.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , \quad 0 < x < 5 \\ \alpha^2 + \beta^2 \cdot \ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)\cdot e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$

Α). Να βρεθούν τα, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$. Μονάδες 6

Β). Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$. Μονάδες 10

Γ). Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος Β να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

Α). $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} (x^2 - 8\cdot x + 16) = 1$.

$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} (\alpha^2 + \beta^2)\cdot\ln(x - 5 + e) + 2\cdot(\alpha + 1)\cdot e^{5-x} = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 2.$

Β). Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 5$, πρέπει $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = f(5)$.

δηλαδή $\alpha^2 + \beta^2 + 2\cdot\alpha + 2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\cdot\alpha + 1 = 0 \Rightarrow (\alpha + 1)^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \{\alpha + 1 = 0 \text{ και } \beta = 0\}$

Άρα $\alpha = -1$ και $\beta = 0$.

Γ). Για $\alpha = -1$ και $\beta = 0$, είναι f (x) = $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ \ln(x - 5 + e), & x \geq 5 \end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x - 5 + e) = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - 5 + e) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

ΘΕΜΑ 4

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω f(t) η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f(t) είναι $\dfrac{8}{t\ +\ 1} - 2$

α). Να βρείτε τη συνάρτηση f(t). Μονάδες 6

β). Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη; Μονάδες 6

γ). Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t = 8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή t = 10 η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2{,}4$). Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α). $f'(t) = \dfrac{8}{t+1} - 2 = 8\cdot\dfrac{1}{t+1} - 2 = [8\cdot\ln(t + 1) - 2\cdot t]'$. άρα $f(t) = 8\cdot\ln(t + 1) - 2\cdot t + c$.

Είναι $f(0) = 0$, άρα $c = 0$. Επομένως $f(t) = 8\cdot\ln(t + 1) - 2\cdot t$, $t > 0$.

β). $f'(t) = \dfrac{8}{t+1} - 2 = \dfrac{6-2t}{t+1}$, $t \geq 0$.

t	0	3	+∞
f΄(t)	+	0	-
f (t)	↗		↘

Η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη όταν t = 3.

γ). $f(8) = 8\cdot\ln(8 + 1) - 2\cdot 8 = 8\cdot\ln 9 - 16 = 8\cdot\ln 3^2 - 16 = 16\cdot\ln 3 - 16 = 16\cdot(\ln 3 - 1) > 0$, διότι $\ln 3 > 1$.

$f(10) = 8\cdot\ln(10 + 1) - 2\cdot 10 = 8\cdot\ln 11 - 20 = 8\cdot 2{,}4 - 20 = 19{,}2 - 20 < 0$.

Άρα τη χρονική στιγμή t = 8, υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή t = 10, η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί.

ΙΟΥΝΙΟΣ 2000
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Α1). Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (x_0, $f(x_0)$).

Α2). Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ,τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Β1). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.
β). Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0,τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
γ). Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0,τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0.

Β2). Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0.

Στήλη Α συναρτήσεις	Στήλη Β εφαπτόμενες
Α). $f(x) = 3\cdot x^3$, $x_0 = 1$	1). $y = -2\cdot x + \pi$
Β). $f(x) =$ ημ$(2\cdot x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$	2). $y = \frac{1}{4}\cdot x + 1$
Γ). $f(x) = 3\cdot\lvert x\rvert$, $x_0 = 0$	3). $y = 9\cdot x - 6$
Δ). $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$	4). $y = -9\cdot x + 5$
	5). δεν υπάρχει

ΛΥΣΗ

Α1). $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.
Α2). Θέμα Θεωρίας.
Β1). α). Σωστό, β). Λάθος, γ). Σωστό.
Β2). $\alpha \to 3$, $\beta \to 1$, $\gamma \to 5$, $\delta \to 2$.

ΘΕΜΑ 3

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0, 1] και ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x\in(0, 1)$. Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι:

α). η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ’ ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

β). υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

γ).Υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2\cdot x + 2000$.

ΛΥΣΗ

α. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο (0, 1).

$1^{ος}$ τρόπος
→ η f είναι συνεχής στο [0 , 1]

$2^{ος}$ τρόπος
Έστω η συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - 3$.

→ $f(0) < 3 < f(1)$
από Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 3$.

→ η g είναι συνεχής στο [0, 1], ως διαφορά συνεχών.
→ $g(0) = f(0) - 3 = 2 - 3 = -1 < 0$.
$g(1) = f(1) - 3 = 4 - 3 = 1 > 0$
από Θ. Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$ ή $f(x_0) - 3 = 0$ ή $f(x_0) = 3$.

Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1), άρα η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μοναδική ρίζα στο (0, 1), δηλαδή η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

β). Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$, άρα η f είναι γν. αύξουσα στο (0, 1).

$$0 < \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1) \Rightarrow 2 < f\left(\frac{1}{5}\right) < 4 \quad (1)$$

$$0 < \frac{2}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1) \Rightarrow 2 < f\left(\frac{2}{5}\right) < 4 \quad (2)$$

$$0 < \frac{3}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1) \Rightarrow 2 < f\left(\frac{3}{5}\right) < 4 \quad (3)$$

$$0 < \frac{4}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1) \Rightarrow 2 < f\left(\frac{4}{5}\right) < 4 \quad (4)$$

$$(1), (2), (3), (4) \Rightarrow 8 < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < 4 \Rightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1).$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο [0, 1], από Θ. ενδιαμέσων τιμών, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

γ). 1ος τρόπος
→ η f είναι συνεχής στο [0, 1].
→ η f είναι παρ/μη στο (0, 1), από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f'(x_2) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 2$.

2ος τρόπος
Έστω η συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - 2 \cdot x$.
→ η g είναι συνεχής στο [0, 1], ως διαφορά Συνεχών.
→ η g είναι παρ/μη στο (0, 1), με $g'(x) = f'(x) - 2$.
→ $g(0) = f(0) - 0 = 2$.
$g(1) = f(1) - 2 = 4 - 2 = 2$, από Θ. Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $g'(x_2) = 0$ ή $f'(x_2) - 2 = 0$ ή $f'(x_2) = 2$.

Άρα υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2 \cdot x + 2000$.

ΘΕΜΑ 4

Τη χρονική στιγμή t = 0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \dfrac{\alpha \cdot t}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}$, $t \geq 0$, όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α). Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.

β). Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

ΛΥΣΗ

α). Η f είναι συνεχής στο $[0 , +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$f(t) = \frac{\alpha \cdot t}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2} = \frac{\alpha \cdot t}{1+\dfrac{t^2}{\beta^2}} = \frac{\alpha \cdot t}{\dfrac{\beta^2+t^2}{\beta^2}} = \frac{\alpha \cdot t \cdot \beta^2}{\beta^2+t^2}, \text{ άρα}$$

$$f'(t) = \left(\frac{\alpha \cdot t \cdot \beta^2}{\beta^2+t^2}\right)' = \frac{(\alpha \cdot t \cdot \beta^2)'(\beta^2+t^2) - (\alpha \cdot t \cdot \beta^2)(\beta^2+t^2)'}{(\beta^2+t^2)^2} = \frac{\alpha \cdot \beta^2(\beta^2+t^2) - 2t \cdot (\alpha \cdot t \cdot \beta^2)}{(\beta^2+t^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{\alpha \cdot \beta^4 + \alpha \cdot \beta^2 \cdot t^2 - 2\alpha \cdot \beta^2 \cdot t^2}{(\beta^2+t^2)^2} \Rightarrow f'(t) = \frac{\alpha \cdot \beta^4 - \alpha \cdot \beta^2 \cdot t^2}{(\beta^2+t^2)^2}.$$

Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης f είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται όταν t = 6, άρα f(6) = 15 και f ′(6) = 0 (Θ. Fermat).

$$f'(6) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha \cdot \beta^4 - \alpha \cdot \beta^2 \cdot 6^2}{(\beta^2+t^2)^2} = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta^4 - \alpha \cdot \beta^2 \cdot 6^2 = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta^2 \cdot (\beta^2 - 36) = 0 \Rightarrow \beta^2 - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta^2 = 36 \Rightarrow \beta = 6.$$

$$f(6) = 15 \Rightarrow \frac{\alpha \cdot \beta^2 \cdot 6}{\beta^2+6^2} = 15 \Rightarrow \frac{\alpha \cdot 6^2 \cdot 6}{\beta^2+6^2} = 15 \Rightarrow 3 \cdot \alpha = 15 \Rightarrow \alpha = 5.$$

β). Η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, άρα $f(t) \geq 12$.

$$f'(t) = \frac{180 \cdot t}{36+t^2}$$

$$f(t) \geq 12 \Rightarrow \frac{180 \cdot t}{36+t^2} \geq 12 \Rightarrow \frac{15 \cdot t}{36+t^2} \geq 1 \Rightarrow 15 \cdot t \geq 36 + t^2 \Rightarrow t^2 - 15 \cdot t + 36 \leq 0.$$

t	0		3		12		$+\infty$
$t^2-15t+36$		+	0	-	0	+	

Άρα το φάρμακο δρα αποτελεσματικά από 3 ώρες μέχρι και 12 ώρες.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2000
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x) = $\dfrac{x^2-3x+2}{x-\alpha}$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α). Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x = 4.

β). Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(1,0) να διέρχεται από το σημείο Α(–2, 3).

γ). Αν α > 2, να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1,2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα x′x.

ΛΥΣΗ

α). $D_f = (-\infty, \alpha)\cup(\alpha, +\infty)$ και $4 \notin D_f$ άρα α = 4.

Β). Πρέπει $\lambda_{\varepsilon\varphi\alpha\pi.} = \lambda_{AM} = f'(1)$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-3x+2}{x-\alpha}\right)' = \frac{(x^2-3x+2)'(x-\alpha)-(x^2-3x+2)(x-\alpha)'}{(x-\alpha)^2} =$$

$$= \frac{(2x-3)(x-\alpha)-(x^2-3x+2)}{(x-\alpha)^2} = \frac{2x^2-2\alpha x-3x+3\alpha-x^2+3x-2}{(x-\alpha)^2} = \frac{x^2-2\alpha x+3\alpha-2}{(x-\alpha)^2}.$$

$$\left.\begin{cases} f'(1) = \dfrac{1-2\alpha+3\alpha-2}{(1-\alpha)^2} = \dfrac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2} = \dfrac{1}{\alpha-1} \\ \lambda_{AM} = \dfrac{0-3}{1+2} = \dfrac{-3}{3} = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\alpha-1} = -1 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Γ). Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει x_0, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x_0^2-2\alpha x_0+3\alpha-2}{(x_0-\alpha)^2} = 0 \Rightarrow x_0^2 - 2\cdot\alpha\cdot x_0 + 3\cdot\alpha - 2 = 0.$$

Πρέπει $\Delta \geq 0 \Rightarrow (-2\cdot\alpha)^2 - 4\cdot1\cdot(3\cdot\alpha-2) \geq 0 \Rightarrow 4\cdot\alpha^2 - 12\cdot\alpha + 8 > 0 \Rightarrow \alpha^2 - 3\cdot\alpha + 2 \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\alpha-1)\cdot(\alpha-2) \geq 0$, που ισχύει διότι $\alpha \geq 2$.

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα διαγωνισμό ενός Οργανισμού για την πρόσληψη προσωπικού, συγκεντρώθηκαν 1.000 γραπτά υποψηφίων. Κάθε γραπτό διορθώνεται από δύο διαφορετικούς βαθμολογητές. Κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα. Για τη διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται με 200 δραχμές. Τη διόρθωση συντονίζουν δύο επόπτες που αμείβονται με 4.000 δραχμές την ημέρα. Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών, κάθε βαθμολογητής παίρνει επί πλέον ως επίδομα 10.000 δραχμές ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε.

α). Να αποδείξετε ότι το κόστος K(x) σε χιλιάδες δραχμές για τη διόρθωση όλων των γραπτών, δίνεται από τη συνάρτηση: $K(x) = 10\left(x + \frac{16}{x} + 40\right)$, όπου x ο αριθμός των βαθμολογητών που απασχολούνται.

β). Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο;

γ). Να βρείτε το ελάχιστο κόστος του β. ερωτήματος και τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκαν οι βαθμολογητές για τη διόρθωση των γραπτών.

ΛΥΣΗ

α). (1000 γραπτά) x (2 φορές) = 2.000 βαθμολογήσεις κάθε πακέτο έχει 4 φακέλους
25 γραπτά = 100 γραπτά 2000: 100 = 20 πακέτα βαθμολόγησης.
Κόστος βαθμολόγησης = 20·2000 δρχ. = 40.000 δρχ = 40 χιλ. δρχ. (1)
Επίδομα = 10000 x βαθμολογητές = 10.000·x δρχ. = 10·x χιλ. δρχ. (2)

Η διόρθωση θα διαρκέσει $\frac{20\,\pi\alpha\kappa\varepsilon\tau\alpha}{x\ \beta\alpha\theta\mu o\lambda o\gamma\eta\tau\varepsilon\varsigma} = \frac{20}{x}$ μέρες (3)

Οι δύο επόπτες θα πάρουν : $2 \cdot \frac{20}{x} \cdot 4.000\ \delta\rho\chi. = \frac{160.000}{x}\ \delta\rho\chi. = \frac{160}{x}$ χιλ.δρχ. (4)

Από (1) , (2) και (4) έχουμε :

$K(x) = 400 + 10 \cdot x + \frac{160}{x} = 10 \cdot \left(40 + x + \frac{16}{x}\right)$ σε χιλ. δρχ., x > 0

β). $K'(x) = 10 \cdot \left(40 + x + \frac{16}{x}\right)' = 10 \cdot \left(1 - \frac{16}{x^2}\right) = 10\frac{x^2 - 16}{x^2}$, x > 0.

x	0	4	+∞
K ′(x)	–		+
K(x)	↘		↗

Ελάχιστο κόστος για x = 4 βαθμολογητές.

γ). Ελάχιστο κόστος = K(4) = 480 χιλ. δρχ.

Από τη σχέση (3), για x = 4 έχουμε ότι η διόρθωση των γραπτών θα γίνει σε $\frac{20}{4}$ = 5 μέρες.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2000

ΘΕΜΑ 1

Α). Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

α). Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

β). Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f ;

Β1). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β). Η συνάρτηση f με $f'(x) = -2\eta\mu x+ \frac{1}{\eta\mu^2 x} + 3$, όπου $x\in[\frac{\pi}{2},\pi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

γ). Αν $f'(x) = g'(x) + 3$ για κάθε $x \in Δ$, τότε η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

ΛΥΣΗ

Α). α). θέμα θεωρίας. β). Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Β). α). Λ, β). Σ, γ). Λ.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e^{2\cdot x}+1}{\eta\mu\ 2x} = 5.$

α). Να βρείτε το f(0).

β). Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

γ). Αν $h(x) = e^{-x}\cdot f(x)$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία Α(0,f(0)) και Β(0,h(0)) αντίστοιχα είναι παράλληλες.

ΛΥΣΗ

α). Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = \dfrac{f(x)-e^{2\cdot x}+1}{\eta\mu\ 2x}$, $x \neq k\cdot\pi/2$ με $κ \in Z$.

Είναι $f(x) = e^{2\cdot x} - 1 + g(x)\cdot\eta\mu 2x$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 5$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} [e^{2\cdot x} - 1 + g(x)\cdot\eta\mu 2x] =$

$= \lim\limits_{x\to 0} (e^{2\cdot x} - 1) + \lim\limits_{x\to 0} g(x)\cdot \lim\limits_{x\to 0} \eta\mu 2x = 0 + 5\cdot 0 = 0.$

β). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1+g(x)\eta\mu 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{2x}-1}{x}+g(x)\cdot\dfrac{\eta\mu 2x}{x}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0} g(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{x} = 2 + 5\cdot 2 = 12.$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}}{1} = 2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{x} = 2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{2x} = 2$. Άρα $f'(0) = 12$.

γ). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}\cdot f(x)-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{-x}\cdot\dfrac{f(x)}{x}\right)$ = $\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ = 1·f ′(0) = f ′(0).

άρα h ′(0) = f ′(0).

Επομένως οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία A (0, f(0)) και B(0, h(0)) αντίστοιχα είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 4

Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο P(t) = 4 + $\dfrac{t-6}{t^2+\dfrac{25}{4}}$.

α). Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.
β). Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.
γ). Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.
δ). Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

ΛΥΣΗ

α). P(0) = 4 + $\dfrac{-6}{\dfrac{25}{4}}=4-\dfrac{24}{25}=\dfrac{76}{25}$.

β). P′(t) = $\left(4+\dfrac{t-6}{t^2+\dfrac{25}{4}}\right)'=\dfrac{(t-6)'\left(t^2+\dfrac{25}{4}\right)-(t-6)\left(t^2+\dfrac{25}{4}\right)'}{\left(t^2+\dfrac{25}{4}\right)^2}=\dfrac{\left(t^2+\dfrac{25}{4}\right)-2t(t-6)}{\left(t^2+\dfrac{25}{4}\right)^2}=$

$=\dfrac{\left(t^2+\dfrac{25}{4}\right)-2t^2+12t}{\left(t^2+\dfrac{25}{4}\right)^2}=\dfrac{-t^2+12t+\dfrac{25}{4}}{\left(t^2+\dfrac{25}{4}\right)^2}$. P′(t) > 0 ⇒ $\dfrac{-t^2+12t+\dfrac{25}{4}}{\left(t^2+\dfrac{25}{4}\right)^2}>0$ ⇒ – t^2 + 12·t + 4 > 0.

Δ = 12 – 4·(–1)·25 = 169 και t = $\dfrac{-12\pm 13}{-2}$ ⇒ t = $\dfrac{25}{2}$ και t = – $\dfrac{1}{2}$ απορρίπτεται.

Η τιμή του προϊόντος αυξάνεται όταν 0 < t < $\dfrac{25}{2}$.

t	0 25/2	+∞
P′(t)	+	–
P(t)	↗	↘

γ). Η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη τη χρονική στιγμή t_0 = $\dfrac{25}{2}$.

δ). Η τιμή του προϊόντος μειώνεται όταν t > $\dfrac{25}{2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}$ P(t) = $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\dfrac{t-6}{t^2+\dfrac{25}{4}}\right)$ = 4 + $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{t-6}{t^2+\dfrac{25}{4}}$ = 4 + $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{t}{t^2}$ = 4 + $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{t}$ = P (0).

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2001

ΙΟΥΝΙΟΣ 2001

ΘΕΜΑ 1

Α1). Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Α2). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α). $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ β). $|z^2| = z^2$ γ). $|z| = -|\overline{z}|$

δ). $|z| = |\overline{z}|$ ε). $|i \cdot \overline{z}| = |z|$

Β1). Αν $z_1 = 3 + 4 \cdot i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της Στήλης Β έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lvert z_1 \cdot z_2 \rvert$	α. 4
2. $\lvert z_1^2 \rvert$	β. 2
3. $\lvert z_2 \rvert^2$	γ. 25
4. $-\lvert \overline{z_1} \rvert$	δ. –5
5. $\lvert i \cdot z_2 \rvert$	ε. –2
	στ. 5
	ζ. 10

Β2). Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$ να δείξετε ότι $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

ΛΥΣΗ

Α1). Θέμα Θεωρίας.

Α2). α $\to$ Σωστό, β $\to$ Λάθος, γ $\to$ Λάθος, δ $\to$ Σωστό, ε $\to$ Σωστό.

Β1). $1 \to$ ζ, $2 \to$ γ, $3 \to$ α, $4 \to$ δ, $5 \to$ β.

ΘΕΜΑ 2

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot x^2 &, x \leq 3 \\ \dfrac{1 - e^{x-3}}{x-3} &, x > 3 \end{cases}$

α). Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = –1/9.

β). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4, f(4)).

γ). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και x = 2.

ΛΥΣΗ

α). Η f είναι συνεχής, άρα είναι και συνεχής στο $x_0 = 3$, άρα $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$.

Είναι : $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (\alpha \cdot x^2) = 9 \cdot \alpha$. επίσης : $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1 - e^{x-3}}{x-3} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{-e^{x-3}}{1} = -1$. Και $f(3) = 9 \cdot \alpha$

Άρα $9\cdot\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -1/9$.

β). $f(4) = \dfrac{1-e^{4-3}}{4-3} = 1-e$. Για $x > 3$: $f'(x) = \left(\dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}\right)' = \dfrac{(1-e^{x-3})'(x-3)-(1-e^{x-3})(x-3)'}{(x-3)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{-e^{x-3}(x-3)-(1-e^{x-3})}{(x-3)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-e^{x-3}(x-3)-(1-e^{x-3})}{(x-3)^2}$.

$f'(4) = \dfrac{-e^{4-3}(4-3)-(1-e^{4-3})}{(4-3)^2} = \dfrac{e-(1-e)}{1} = -1$.

(ε) : $y - f(4) = f'(4)\cdot(x-4) \Rightarrow$ (ε) : $y-(1-e) = -1\cdot(x-4) \Rightarrow$ (ε) : $y-1+e = -x+4 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (ε) : $y = -x+5-e$.

γ). Για $x \in [1, 2]$ είναι $f(x) = -\dfrac{1}{9}\cdot x^2 < 0$, άρα

$$E = -\int_1^2 f(x)\cdot dx = -\int_1^2 \left(-\frac{1}{9}x^2\right)\cdot dx = \frac{1}{9}\cdot\int_1^2 x^2\cdot dx = \frac{1}{9}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{27} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, ισχύει ότι:
$f^3(x) + \beta\cdot f^2(x) + \gamma\cdot f(x) = x^3 - 2\cdot x^2 + 6\cdot x - 1$, για κάθε $x\in$ IR, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.
α). Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
β). Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
γ). Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1).

ΛΥΣΗ

α). $1^{ος}$ τρόπος :
Έστω ότι η παραγωγίσιμη f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0. Από Θ. Fermat είναι $f'(x_0) = 0$.
$[f^3(x) + \beta\cdot f^2(x) + \gamma\cdot f(x)]' = (x^3 - 2\cdot x^2 + 6\cdot x - 1)' \Rightarrow$
$\Rightarrow 3\cdot f^2(x)\cdot f'(x) + 2\cdot\beta\cdot f(x)\cdot f'(x) + \gamma\cdot f'(x) = 3\cdot x^2 - 4\cdot x + 6$. και για $x = x_0$ είναι :
$3\cdot f^2(x_0)\cdot f'(x_0) + 2\cdot\beta\cdot f(x_0)\cdot f'(x_0) + \gamma\cdot f'(x_0) = 3\cdot x_0^2 - 4\cdot x_0 + 6 \Rightarrow 0 = 3\cdot x_0^2 - 4\cdot x_0 + 6$.
Άτοπο διότι το τριώνυμο $3\cdot x_0^2 - 4\cdot x_0 + 6$ έχει $\Delta = -56 < 0$.
Άρα η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β). Η λύση αυτή αποτελεί και $2^{ο}$ τρόπο για το α ερώτημα.
$[f^3(x) + \beta\cdot f^2(x) + \gamma\cdot f(x)]' = (x^3 - 2\cdot x^2 + 6x - 1)' \Rightarrow$
$\Rightarrow 3\cdot f^2(x)\cdot f'(x) + 2\cdot\beta\cdot f(x)\cdot f'(x) + \gamma\cdot f'(x) = 3\cdot x^2 - 4\cdot x + 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow [3\cdot f^2(x) + 2\cdot\beta\cdot f(x) + \gamma]\cdot f'(x) = 3\cdot x^2 - 4\cdot x + 6$.
$\rightarrow$ Είναι $3\cdot f^2(x) + 2\cdot\beta\cdot f(x) + \gamma > 0$, για κάθε $x \in$ R, διότι είναι τριώνυμο ως προς f (x).
με $\Delta = (2\cdot\beta)^2 - 4\cdot 3\cdot\gamma = 4\cdot\beta^2 - 12\cdot\gamma = 4\cdot(\beta^2 - 3\cdot\gamma) < 0$, αφού $\beta^2 < 3\cdot\gamma$.
$\rightarrow$ Είναι $3\cdot x^2 - 4\cdot x + 6 > 0$, για κάθε $x \in$ R, διότι είναι τριώνυμο ως προς x με $\Delta = -56 < 0$.

Άρα $f'(x) = \dfrac{3x^2-4x+6}{3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma} > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

(άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα, για το α ερώτημα)

γ). Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = x^3 - 2\cdot x^2 + 6\cdot x - 1$.
$\rightarrow$ η g είναι συνεχής στο [0, 1], ως πολυωνυμική.
$\rightarrow$ $g(0) = -1 < 0$ και $g(1) = 4 > 0$.

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$, ώστε $g(x_0) = 0$.
Είναι $f^3(x) + \beta\cdot f^2(x) + \gamma\cdot f(x) = g(x)$ και για $x = x_0$
$f^3(x_0) + \beta\cdot f^2(x_0) + f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow f(x_0)\cdot[f(x_0) + \beta\cdot f(x_0) + \gamma] = 0$
Το $f^2(x_0) + \beta\cdot f(x_0) + \gamma$ είναι τριώνυμο με $\Delta = \beta^2 - 4\cdot\gamma < 0$.
[Είναι $0 < \beta < 3\cdot\gamma$, άρα $\gamma > 0$. Άρα $\beta^2 < 3\cdot\gamma < 4\cdot\gamma \Rightarrow \beta^2 - 4\cdot\gamma < 0$]
$\Rightarrow \{ f(x_0) = 0$ ή $f^2(x_0) + \beta\cdot f(x_0) + \gamma = 0 \}$.
Άρα $f^2(x_0) + \beta\cdot f(x_0) + \gamma > 0$, για κάθε $x_0 \in R$. Επομένως $f(x_0) = 0$.
και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι μοναδικό.
Άρα υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i). $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$ ii). $f(x) = 1 - 2\cdot x^2 \cdot \int_0^1 t\cdot f^2(x\cdot t)\cdot dt$, για κάθε $x \in R$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} - x^2$, για κάθε $x \in R$.

α). Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2\cdot x\cdot f^2(x)$

β). Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ). Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

δ). Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} (x\cdot f(x)\cdot \eta\mu(2\cdot x))$.

ΛΥΣΗ

α). $f(x) = 1 - 2\cdot x^2\cdot \int_0^1 t\cdot f^2(x\cdot t)\cdot dt$. [Θέτω $x\cdot t = u \Rightarrow du = x\cdot dt$, για $t = 0 \Rightarrow u = 0$, $t = 1 \Rightarrow u = x$ }

$\Rightarrow f(x) = 1 - 2\cdot \int_0^1 x\cdot t\cdot f^2(x\cdot t)\cdot x\cdot dt \Rightarrow f(x) = 1 - 2\cdot \int_0^x u\cdot f^2(u)\cdot du$.

$$f'(x) = \left(1 - 2\cdot\int_0^x u\cdot f^2(u)\cdot du\right)' = -2\cdot x\cdot f^2(x).$$

$$\beta).\ g'(x) = \left[\frac{1}{f(x)} - x^2\right]' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} - 2x = -\frac{2x\cdot f^2(x)}{f^2(x)} - 2x = -2\cdot x = 2\cdot x - 2\cdot x = 0.$$

άρα η g είναι σταθερή στο R.

γ). $f(0) = 1 - 2\cdot\int_0^0 u\cdot f^2(u)\cdot du = 1 - 2\cdot 0 = 1$.

$g(0) = \dfrac{1}{f(0)} - 0^2 = 1 - 0 = 1$, και επειδή η g είναι σταθερή είναι $g(x) = 1$, για κάθε $x \in R$.

Άρα : $\dfrac{1}{f(x)} - x^2 = 1$, για κάθε $x \in R \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} = x^2 + 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, για κάθε $x \in R$.

δ). Είναι $x\cdot f(x)\cdot \eta\mu 2x = \dfrac{x}{x^2+1}\cdot \eta\mu 2x$.

$-1 \le \text{ημ}2\cdot\text{x} \le 1 \Rightarrow -\dfrac{x}{x^2+1} \le \dfrac{x}{x^2+1}\cdot\text{ημ}2\cdot\text{x} \le \dfrac{x}{x^2+1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{x}\right)=0$, και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\cdot\eta\mu 2x\right)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot f\;\; x\;\;\cdot\eta\mu 2x\;=0$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 1

Α1). Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

→ όλες οι συναρτήσεις της μορφής: $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

→ κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή: $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$

Α2). Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α). $\int_\alpha^\beta \lambda \cdot f(x) \cdot dx = ...$ β). $\int_\alpha^\beta \left(f(x) + g(x) \right) \cdot dx .....$ γ). $\int_\alpha^\beta \left(\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) \right) \cdot dx = ...$

όπου λ, μ $\in$ R και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β].

Β1). Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f''(x) = 6 \cdot x + 4$, $x \in R$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της Α(0, 3) έχει κλίση 2.

Β2). Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

(α). $\int_0^1 \left(e^x + x \right) \cdot dx$

(β). $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} \cdot dx$

(γ). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cdot \eta\mu x + 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x \right) \cdot dx$

ΛΥΣΗ

Α1). θέμα θεωρίας

Α2). α). $= \lambda \cdot \int_\alpha^\beta f(x) \cdot dx$, β). $= \int_\alpha^\beta f(x) \cdot dx + \int_\alpha^\beta g(x) \cdot dx$, γ). $\lambda \cdot \int_\alpha^\beta f(x) \cdot dx + \mu \cdot \int_\alpha^\beta g(x) \cdot dx$.

Β1). $f'(x) = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + c_1 = 2 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 2$. [$f'(0) = 2 \Rightarrow c_1 = 2$]

$f(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + c_2$, Άρα $f(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3$. [$A(0, 3) \in C_f$, $\Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow c_2 = 3$]

Β2). α). $\int_0^1 \left(e^x + x \right) \cdot dx = \left[e^x + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = e - \frac{1}{2}$.

β). $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} \cdot dx = 3 \cdot \int_1^4 x^{2-\frac{1}{2}} \cdot dx = 3 \cdot \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} \cdot dx = 3 \cdot \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^4 = 3 \cdot \left[\frac{2\sqrt{x}^5}{5} \right]_1^4 = \frac{186}{5}$.

γ). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cdot \eta\mu x + 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x \right) \cdot dx = \left[-2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3 \cdot \eta\mu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 5$.

ΘΕΜΑ 2

α). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:
$|z+16| = 4\cdot|z+1|$

β). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:
$|z-1| = |z-i|$

γ). Να τρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων (α) και (β).

ΛΥΣΗ

α). $|z + 16| = 4\cdot|z + 1| \Rightarrow |z + 16|^2 = 16\cdot|z + 1|^2 \Rightarrow (z + 16)\cdot(\bar{z} + 16) = 16\cdot(z + 1)\cdot(\bar{z} + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow z\cdot\bar{z} + 16\cdot z + 16\cdot\bar{z} + 256 = 16\cdot z\cdot\bar{z} + 16\cdot z + 16\cdot\bar{z} + 16 \Rightarrow -15\cdot z\cdot\bar{z} = -240 \Rightarrow z\cdot\bar{z} = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow |z|^2 = 16 \Rightarrow |z| = 4$. άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 4.

β). Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, με Α(1, 0) και Β (0, 1), η διχοτόμος της γωνίας xOy με εξίσωση y = x.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+\alpha &, \quad x \le 1 \\ \left(1-e^{-x+1}\right)\cdot\ln(x-1), & x \in (1,2] \end{cases}$, όπου $\alpha \in R$.

α). Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}$,

β). Να βρείτε το $\alpha \in R$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

γ). Για α = –1 να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα x′x.

ΛΥΣΗ

α). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{-x+1}}{1} = 1$.

β). $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+\alpha) = 1+\alpha$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(1-e^{-x+1}\right)\ln(x-1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{1-e^{-x+1}}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{-e^{-x+1}}{\left(1-e^{-x+1}\right)^2}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\left(1-e^{-x+1}\right)^2}{-(x-1)e^{-x+1}} =$$

$$= -\lim_{x\to 1^+}\frac{1-e^{-x+1}}{e^{-x+1}}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{1-e^{-x+1}}{e^{-x+1}} = -1\cdot 0 = 0.$$

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει 1 + α = 0 ⇒ α = –1.

γ). → Η f είναι συνεχής στο [1, 2]

→ Η f είναι παραγωγίσιμη στο (1, 2) ως γινόμενο παραγωγισίμων

→ f(1) = 1 + α = 0

f(2) = $(1 - e^{-1})\cdot\ln 1 = 0$.

Από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ∈ (1, 2), τέτοιο ώστε f ′(ξ) = 0, δηλαδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α (ξ , f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα x′x.

ΘΕΜΑ 4

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο (0,+∞) για την οποία ισχύει:

α). Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞). $f(x)=\dfrac{1}{x}+\displaystyle\int_1^x \dfrac{t\cdot f(t)}{x^2}\cdot dt$, με x > 0.

β). Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x},\ x>0$.

γ). Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ). Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

ε). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1, x = e.

ΛΥΣΗ

α). f(x) = $\dfrac{1}{x}+\displaystyle\int_1^x \dfrac{t\cdot f(t)}{x^2}\cdot dt=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\cdot\int_1^x t\cdot f(t)\cdot dt$, με x > 0 (1).

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις των παραγωγίσιμων $f_1(x)=\dfrac{1}{x}$, $f_2(x)=\dfrac{1}{x^2}$ και

$f_3(x)=\displaystyle\int_1^x t\cdot f(t)\cdot dt$.

β). (1) ⇒ $x^2\cdot f(x)=x+\displaystyle\int_1^x t\cdot f(t)\cdot dt$. Παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε :

$[x^2\cdot f(x)]'=(x)'+\left(\displaystyle\int_1^x t\cdot f(t)\cdot dt\right)' \Rightarrow 2\cdot x\cdot f(x)+x^2\cdot f'(x)=1+x\cdot f(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow x\cdot f(x)+x^2\cdot f'(x)=1\Rightarrow f(x)+x\cdot f'(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow [x\cdot f(x)]'=(\ln x)'\Rightarrow x\cdot f(x)=\ln x+c\Rightarrow$

$x\cdot f(x)=\ln x+c\Rightarrow f(x)=\dfrac{\ln x+c}{x}$, με x > 0 [Από συνέπειες Θ.Μ.Τ.]

Για x = 1 είναι f(1) = c = 1, άρα $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$, με x > 0.

γ). $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x+1}{x}\right)'=\dfrac{(\ln x+1)'x-(\ln x+1)(x)'}{x^2}=\dfrac{1-\ln x-1}{x^2}=-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

x	−∞	1	+∞
f ′(x)	+		–
f(x)	↗		↘
		Ολ.μέγ.	

Ολικό μέγιστο $f(1)=\dfrac{\ln 1+1}{1}=1$ (1). $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x+1}{x}=-\infty$ (2)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ (3) Άρα από τις (1), (2), (3) έχουμε : f(A) = (–∞ , 1].

δ). Από (2) και (3) η C_f έχει ασύμπτωτες τους άξονες x′x και y′y.

ε). Η συνάρτηση f, είναι f(x) > 0 , για κάθε x ∈ [1, e], επομένως έχουμε :

$$E = \int_1^e f(x)\cdot dx = \int_1^e \frac{\ln x+1}{x}\cdot dx = \int_0^1 (u+1)\cdot du = \left[\frac{u^2}{2}+u\right]_0^1 = \frac{1}{2}+1-0 = \frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

[θέτουμε u = lnx και du = $\frac{1}{x}\cdot$dx , για x = 1 $\Rightarrow$ u = 0 και για x = e $\Rightarrow$ u = 1].

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2002

ΜΑΪΟΣ 2002

ΘΕΜΑ 1

Α).Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\cdot dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Β.1.Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)$ = συνx .

Β.2.Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α, β] και συνεχής στο (α, β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α, β] μία μέγιστη τιμή. β). Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

γ). Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

δ). Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR , τότε $\int f(x)\cdot dx = x\cdot f(x) - \int x\cdot f'(x)\cdot dx$.

ε). Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0 .

ΛΥΣΗ

Α). Θέμα Θεωρίας.

Β1).Θέμα Θεωρίας.

Β2). α). Λάθος, β). Λάθος, γ). Σωστό, δ). Σωστό, ε). Σωστό.

ΘΕΜΑ 2

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu}\cdot z$, $\nu \in$ IN*.

α). Να δείξετε ότι f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0.

β). Αν $|z| = \rho$ και Arg(z) = θ, να δείξετε ότι f(13) = $\rho\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$.

γ). Αν $|z| = 2$ και Arg(z) = $\frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13).

ΛΥΣΗ

α). f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = $i^3\cdot z + i^8\cdot z + i^{13}\cdot z + i^{18}\cdot z = -i\cdot z + z + i\cdot z - z = 0$.

β). f(13) = $i^{13}\cdot z = i\cdot z = i\cdot\rho\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta + i\cdot\eta\mu\theta) = \rho\cdot(i\cdot\sigma\upsilon\nu\theta - 1\cdot\eta\mu\theta) = \rho\cdot(-1\cdot\eta\mu\theta + i\cdot\sigma\upsilon\nu\theta) =$

$$= \rho\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right].$$

γ). Το σημείο Ο(0, 0), είναι εικόνα του μιγαδικού $z_0 = 0 = 0 + i\cdot 0$.

Ο μιγαδικός z = 2·(συν(π/3) + i·ημ(π/3)) = $2\cdot\left[\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 1 + i\sqrt{3}$, άρα M(z) = (1, $\sqrt{3}$).

Ο μιγαδικός f(13) = $2\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right]$ = $2\cdot\left(-\eta\mu\frac{\pi}{3}+i\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)$

Επομένως ο μιγαδικός f(13) = $-\sqrt{3}+i$ και N(f(13)) = N($-\sqrt{3}$,1).

Το εμβαδόν του τριγώνου (OMN) = $\frac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot|1+3| = 2$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 3

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το IR . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.
α). Να δείξετε ότι η g είναι 1 − 1.
β). Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2\cdot x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

ΛΥΣΗ

α). $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ και επειδή η fog είναι «1 – 1», είναι $x_1 = x_2$.

β). $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ και η g είναι «1 – 1», άρα $f(x) + x^3 - x = f(x) + 2\cdot x - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3 - x - 2\cdot x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 3\cdot x + 1 = 0$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = x^3 - 3\cdot x + 1$.
$h'(x) = (x^3 - 3\cdot x + 1)' = 3\cdot x^2 - 3$.

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
h ′(x)	+	–	+
h(x)	↗	↘	↗

→ $\Delta_1 = (-\infty, -1)$: όπου h γνησίως αύξουσα.
$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3 - 3\cdot x + 1) = -\infty$.
$\lim_{x\to-1^-} h(x) = \lim_{x\to-1^-}(x^3 - 3\cdot x + 1) = 3$. άρα $h(\Delta_1) = (-\infty, 3)$
$0 \in h(\Delta_1)$, άρα η h(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα ρ_1 στο $\Delta_1 = (-\infty, -1)$ και $\rho_1 < 0$.
→ $\Delta_2 = [-1 , 1]$. Όπου h γνησίως φθίνουσα.
h(–1) = 3
h(1) = –1. άρα $h(\Delta_2) = [-1, 3]$. $0 \in h(\Delta_2)$ άρα η h (x) = 0 έχει μοναδική ρίζα ρ_2 στο $\Delta_2 = [-1, 1]$
→ $\Delta_3 = (1, +\infty)$. Η h είναι γνησίως αύξουσα.
$\lim_{x\to1^+} h(x) = \lim_{x\to1^+}(x^3 - 3\cdot x + 1) = -1$.
$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3 - 3\cdot x + 1) = +\infty$. Άρα $h(\Delta_3) = (-1 , +\infty)$.
$0 \in h(\Delta_3)$ άρα η h (x) = 0 έχει μοναδική ρίζα ρ_3 στο $\Delta_3 = (1, +\infty)$ και $\rho_3 > 0$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $\rho_2 > 0$.
→ Η h είναι συνεχής στο [0, 1].
→ h(0) = 1 και h(1) = –1. Από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0 , 1) και επειδή $\rho_1 < 0$ και $\rho_3 > 1$ θα είναι $\rho_2 \in (0 , 1)$.

ΘΕΜΑ 4

α). Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β].

Να αποδείξετε ότι αν h(x) > g(x) για κάθε x ∈ [α, β], τότε και $\int_\alpha^\beta h(x)\cdot dx > \int_\alpha^\beta g(x)\cdot dx$.

β). Δίνεται η παραγωγίσιμη στο IR συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(x) - e^{-f(X)} = x - 1,\ x \in R$ και $f(0) = 0$.

i). Να εκφραστεί η f ′ ως συνάρτηση της f.

ii). Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} \prec f(x) \prec x\cdot f'(x)$, για κάθε x > 0.

iii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = 0, x = 1 και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} \prec E \prec \frac{1}{2}\cdot f(1)$.

ΛΥΣΗ

α). h(x) > g(x) ⇒ h(x) − g(x) > 0 άρα $\int_\alpha^\beta [h(x) - g(x)]\cdot dx > 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta h(x)\cdot dx - \int_\alpha^\beta g(x)\cdot dx > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_\alpha^\beta h(x)\cdot dx > \int_\alpha^\beta g(x)\cdot dx$.

β). i). $[f(x) - e^{-f(x)}]' = (x-1)' \Rightarrow f'(x) + e^{-f(x)}\cdot f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x)\cdot[1 + e^{-f(x)}] = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+e^{-f(x)}} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}$.

ii). $1^{ος}$ τρόπος

Θα δείξω $\frac{x}{2} < f(x) < x\cdot f'(x) \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < f'(x)$.

→ η f είναι συνεχής στο [0, x].

→ η f είναι παραγωγίσιμη στο (0 , x). Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ∈ (0, x), τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

$f'(0) = \frac{e^{f(0)}}{1+e^{f(0)}} = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$.

Άρα αρκεί να δείξουμε f ′(0) < f ′(ξ) < f ′(x), με 0 < ξ < x.

Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι η f ′ είναι γνησίως αύξουσα.

$$f''(x) = \left(\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}\right)' = \frac{(e^{f(x)})'(1+e^{f(x)}) - e^{f(x)}\cdot(1+e^{f(x)})'}{(1+e^{f(x)})^2} = \frac{e^{f(x)}f'(x)\cdot(1+e^{f(x)}) - e^{f(x)}\cdot e^{f(x)}f'(x)}{(1+e^{f(x)})^2}$$

$= \frac{e^{f(x)}f'(x)}{(1+e^{f(x)})^2} > 0$, διότι f ′(x) > 0, άρα η f ′ είναι γνησίως αύξουσα.

$2^{ος}$ τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - \frac{x}{2}$.

$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2} = \frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}} - \frac{1}{2} = \frac{e^{f(x)}-1}{2(1+e^{f(x)})} > 0$, για $x > 0$.

διότι $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow e^{f(x)} > e^0 \Rightarrow e^{f(x)} - 1 > 0$. [επειδή f γνησίως αύξουσα]
άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow f(x) - \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow f(x) > \frac{x}{2}$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = f(x) - x\cdot f'(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) - f'(x) - x\cdot f''(x) = -x\cdot f''(x)$.

και $f''(x) = \left(\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}\right)' = \frac{\left[e^{f(x)}\right]'\cdot(1+e^{f(x)}) - e^{f(x)}\cdot(1+e^{f(x)})'}{(1+e^{f(x)})^2} =$

$= \frac{e^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot(1+e^{f(x)}) - e^{f(x)}\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)}{(1+e^{f(x)})^2} = \frac{e^{f(x)}\cdot f'(x)}{(1+e^{f(x)})^2} > 0$.

διότι $f'(x) > 0$. Άρα $h'(x) < 0$, για $x > 0$, δηλαδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
$x > 0 \Rightarrow h(x) < h(0) \Rightarrow f(x) - x\cdot f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) < x\cdot f'(x)$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε : $\frac{x}{2} < f(x) < x\cdot f'(x)$, για κάθε $x > 0$.

iii). Είναι $\frac{x}{2} \le f(x) \le x\cdot f'(x)$, για κάθε $x \ge 0$. άρα $f(x) \ge 0$, για κάθε $x \ge 0$ και $E = \int_0^1 f(x)\cdot dx$.

$\rightarrow \frac{x}{2} < f(x) \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2}\cdot dx < \int_0^1 f(x)\cdot dx \Rightarrow \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 < E \Rightarrow \frac{1}{4} < E$ (3)

$\rightarrow f(x) < x\cdot f'(x) \Rightarrow \int_0^1 f(x)\cdot dx < \int_0^1 x\cdot f'(x)\cdot dx \Rightarrow E < \left[x\cdot f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)\cdot dx \Rightarrow$

$\Rightarrow E < f(1) - E \Rightarrow 2\cdot E < f(1) \Rightarrow E < \frac{1}{2}\cdot f(1)$ (4)

Από (3) και (4) έχουμε $4 < E < \frac{1}{2}\cdot f(1)$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2002

ΘΕΜΑ 1

Α). Αν $z_1 = \rho_1\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\cdot\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\cdot\eta\mu\theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε να αποδείξετε ότι: $z_1\cdot z_2 = \rho_1\cdot\rho_2\cdot[\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2) + i\cdot\eta\mu(\theta_1 + \theta_2)]$.

Β). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Αν $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$.

β). Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

γ). Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β] , στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

δ). Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.

ε). Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$.

ΛΥΣΗ

Α). Θέμα θεωρίας.

Β). α). Λ, β). Σ, γ). Σ, δ). Λ, ε). Λ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in R$.

α). Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

β). Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

γ). Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)\cdot dx$.

ΛΥΣΗ

α). $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)' = \dfrac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$, για κάθε $x \in R$.

Η f είναι γν. αύξουσα στο R, άρα και «1 – 1» , δηλαδή αντιστρέψιμη.

$y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \Rightarrow y\cdot e^x + y = e^x - 1 \Rightarrow y + 1 = e^x - y\cdot e^x \Rightarrow y + 1 = e^x\cdot(1 - y) \Rightarrow e^x = \dfrac{1+y}{1-y}$.

περιορισμοί : $y \neq 1$ και $\dfrac{1+y}{1-y} > 0 \Rightarrow y \in (-1, 1)$.

Άρα $e^x = \dfrac{1+y}{1-y} \Rightarrow x = \ln\dfrac{1+y}{1-y}$, $y \in (-1, 1)$. Και τελικά $f^{-1}(y) = \ln\dfrac{1+y}{1-y}$, $y \in (-1, 1)$.

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι : $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$.

β). $f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow \ln\frac{1+x}{1-x} = 0 \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = 1 \Rightarrow 1 + x = 1 - x \Rightarrow x = 0.$

γ). $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)\cdot dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\cdot dx.$

[θέτουμε : $u = -x \Rightarrow du = -dx$, για $x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}$ και $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$]

$$= -\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right)\cdot du = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right)\cdot du = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\cdot dx \Rightarrow I = -I \Rightarrow 2\cdot I = 0 \Rightarrow I = 0.$$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη στο R, με τύπο $f(x) = \dfrac{|x-z|^2 - |x+\bar{z}|^2}{x^2+|z|^2}$.

όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta\cdot i$, $\alpha, \beta \in R$, με $\alpha \neq 0$.

α). Να βρείτε τα όρια $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

β). Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f, εάν $|z+1| > |z-1|$.

γ). Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.

ΛΥΣΗ

α). $f(x) = \dfrac{|x-z|^2 - |x+\bar{z}|^2}{x^2+|z|^2} = \dfrac{(x-z)(x-\bar{z}) - (x+\bar{z})(x+z)}{x^2+|z|^2} =$

$$= \frac{x^2 - \bar{z}\cdot x - z\cdot x + \bar{z}\cdot z - x^2 - \bar{z}\cdot x - z\cdot x - \bar{z}\cdot z}{x^2+|z|^2} = \frac{-2(z+\bar{z})\cdot x}{x^2+|z|^2} = \frac{-4\operatorname{Re}(z)\cdot x}{x^2+|z|^2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4\operatorname{Re}(z)\cdot x}{x^2+|z|^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4\operatorname{Re}(z)\cdot x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4\operatorname{Re}(z)}{x} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4\operatorname{Re}(z)\cdot x}{x^2+|z|^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4\operatorname{Re}(z)\cdot x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4\operatorname{Re}(z)}{x} = 0.$$

β). $|z+1| > |z-1| \Rightarrow |z+1|^2 > |z-1|^2 \Rightarrow (z+1)\cdot(\bar{z}+1) > (z-1)\cdot(\bar{z}-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow z\cdot\bar{z} + z + \bar{z} + 1 > z\cdot\bar{z} - z - \bar{z} + 1 \Rightarrow 2\cdot(z+\bar{z}) > 0 \Rightarrow 4\cdot\operatorname{Re}(z) > 0.$

$$f'(x) = -4\cdot\operatorname{Re}(z)\cdot\left(\frac{x}{x^2+|z|^2}\right)' = -4\cdot\operatorname{Re}(z)\cdot\frac{|z|^2 - x^2}{(x^2+|z|^2)^2} = 4\cdot\operatorname{Re}(z)\cdot\frac{|z|^2 - x^2}{(x^2+|z|^2)^2}.$$

x	$-\infty$ $-|z|$	$|z|$	$+\infty$
f ′(x)	+	–	+
f(x)	↗	↘	↗

τοπ. μέγιστο f (−|z|) = $\dfrac{-4\operatorname{Re} z \ \cdot \ -|z|}{-|z|^{\ 2} + |z|^2} = \dfrac{4|z|\cdot \operatorname{Re} z}{2\cdot |z|^2} = \dfrac{2\cdot \operatorname{Re} z}{|z|}$.

τοπ. ελάχιστο f(|z|) = $\dfrac{-4\operatorname{Re} z \ \cdot |z|}{|z|^2 + |z|^2} = \dfrac{-4|z|\cdot \operatorname{Re} z}{2\cdot |z|^2} = -\dfrac{2\cdot \operatorname{Re} z}{|z|}$.

γ). $\Delta_1 = (-\infty, -|z|)$ με f γνησίως αύξουσα.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-4\operatorname{Re} z \ \cdot x}{x^2 + |z|^2} = 0$ και $\lim\limits_{x\to -|z|} f(x) = f \ \ -|z| \ \overset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma}{=} \dfrac{2\operatorname{Re} z}{|z|}$.

Άρα : $0 \notin f(\Delta_1)$, άρα η f δεν έχει ρίζες στο Δ_1.

→ $\Delta_2 = [-|z|, |z|]$ με f γνησίως φθίνουσα.

$f(-|z|) = \dfrac{2\operatorname{Re} z}{|z|}$ και $f(z) = -\dfrac{2\operatorname{Re} z}{|z|}$. Άρα $f(\Delta_2) = \left[-\dfrac{2\operatorname{Re} z}{|z|}, \dfrac{2\operatorname{Re} z}{|z|}\right]$

$0 \in f(\Delta_1)$, άρα η f έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2.

→ $\Delta_3 = (|z|, +\infty)$. με f γνησίως αύξουσα.

$\lim\limits_{x\to |z|} f \ \ x \ \overset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma}{=} f \ \ |z| \ = -\dfrac{2\operatorname{Re} z}{|z|}$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-4\operatorname{Re} z \ \cdot x}{x^2 + |z|^2} = 0$.

Άρα $f(\Delta_3) = \left(-\dfrac{2\operatorname{Re} z}{|z|}, 0\right)$, και $0 \notin f(\Delta_3)$, άρα η f δεν έχει ρίζες στο Δ_3.

Επομένως $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\dfrac{2\operatorname{Re} z}{|z|}, \dfrac{2\operatorname{Re} z}{|z|}\right]$, και η f (x) = 0 έχει μοναδική ρίζα στο R.

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο IR. με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:
$f''(x)\cdot f(x) + [f'(x)]^2 = f(x)\cdot f'(x)$, $x \in R$, και $f(0) = 2\cdot f'(0) = 1$.
α). Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.
β). Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα [0,1], να δείξετε ότι η εξίσωση $2\cdot x - \displaystyle\int_0^x \frac{g \ \ t}{1+ f^2 \ \ t} \cdot dt = 1$, έχει μία μοναδική λύση στο διάστημα [0,1].

ΛΥΣΗ

α). $f'(x)\cdot f(x) + (f'(x))^2 = f(x)\cdot f'(x) \Rightarrow [f'(x)\cdot f(x)]' = f'(x)\cdot f(x)$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου $f'(x)\cdot f(x) = c_1\cdot e^x$ και για x = 0 έχουμε $f'(0)\cdot f(0) = c_1 = 2$.

Άρα $f'(x)\cdot f(x) = 2\cdot e^x \Rightarrow 2\cdot f(x)\cdot f'(x) = e^x \Rightarrow [f^2(x)]' = (e^x)'$.

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. έχουμε $f^2(x) = e^x + c_2$ και για x = 0 έχουμε $f^2(0) = 1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 0$.

Επομένως $f^2(x) = e^x$.

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η f δεν έχει ρίζες, άρα από συνέπειες του Θ. Bolzano η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και επειδή f(0) = 1 > 0 θα είναι f(x) > 0, για κάθε $x \in R$.

Επομένως $f(x) = \sqrt{e^x}$.

β). Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = 2\cdot x - \displaystyle\int_0^x \frac{g \ \ t}{1+ f^2 \ \ t} \cdot dt - 1$.

Είναι h(x) = 2·x – 1 – $\int_0^x \frac{g(t)}{1+e^t}\cdot dt$.

Η h είναι συνεχής στο [0, 1] ως πράξεις συνεχών.

→ h(0) = – 1 < 0 και h(1) = 1 – $\int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}\cdot dt$ > 0 διότι :

0 ≤ g(t) ≤ 1 (1)

$0 \le t \le 1 \Rightarrow e^0 \le e^t \le 1 + e^t \le 1 + e \Rightarrow \frac{1}{1+e} \le \frac{1}{1+e^t} \le \frac{1}{2}$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow 0 \le \frac{g(t)}{1+e^t} \le \frac{1}{2}$ (3)

Άρα $\frac{1}{2} - \frac{g(t)}{1+e^t} \ge 0$ και $\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{g(t)}{1+e^t}\right)\cdot dt \ge 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot dt - \int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}\cdot dt \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \ge \int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}\cdot dt \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}\cdot dt \ge 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow h(1) \ge \frac{1}{2} > 0$.

άρα από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της ή στο (0, 1).

h ′(x) = $\left(2x - 1 - \int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}\cdot dt\right)' = 2 - \left(\int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}\cdot dt\right)' = 2 - \frac{g(x)}{1+e^x}$.

Από την (3) έχουμε : $0 \ge -\frac{g(x)}{1+e^x} \ge -\frac{1}{2} \Rightarrow 2 \ge 2 - \frac{g(x)}{1+e^x} \ge 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \ge h'(x) \ge \frac{3}{2} \Rightarrow h'(x) > 0$,
για κάθε x ∈ [0, 1].

Άρα η ή είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 1], και η h(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα στο [0, 1].

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2003

ΜΑΪΟΣ 2003

ΘΕΜΑ 1

Α). Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
Β). Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;
Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Αν z ένας μιγάδικος αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

β). Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο

Δ). γ). Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει:

$\int f'\ x\ \cdot dx = f\ x\ + c$, $c \in R$.

δ). Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράσταση της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

ε). Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x) = 0$ τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

ΛΥΣΗ

Α). Θέμα Θεωρίας.
Β). Θέμα Θεωρίας.
ΓΔ). α. Σωστό β. Σωστό γ. Σωστό δ. Λάθος ε. Λάθος

ΘΕΜΑ 2

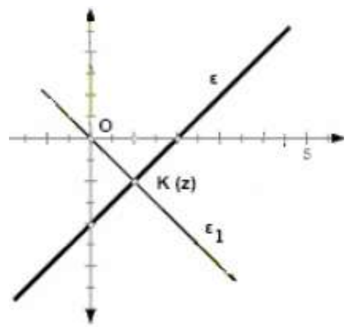
Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + i\cdot\beta$, όπου $\alpha, \beta \in R$ και $w = 3\cdot z - i\cdot\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.
α). Να αποδείξετε ότι $Re(w) = 3\cdot\alpha - \beta + 4$, $Im(w) = 3\cdot\beta - \alpha$
β). Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.
γ). Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

ΛΥΣΗ

α). $w = 3\cdot z - i\cdot\bar{z} + 4 = 3\cdot\ \alpha + \beta\cdot i\ - i\cdot\ \alpha - \beta\cdot i\ + 4$. Άρα $w = 3\alpha - \beta + 4 +\ 3\beta - \alpha\ \cdot i$, οπότε

$\mathrm{Re}\ w\ = 3\alpha - \beta + 4$ = x και $Im\ w\ = 3\beta - \alpha$ = y.

β). Αφού οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y = x – 12. ισχύει : $Im\ w\ = \mathrm{Re}\ w\ - 12$ δηλαδή $3\beta - \alpha = 3\alpha - \beta + 4 - 12$ ή $4\beta = 4\alpha - 8$ δηλαδή $\beta = \alpha - 2$, οπότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.



γ). Ο μιγαδικός z του οποίου η εικόνα κινείται στην $y = x - 2$ και έχει ελάχιστο μέτρο είναι αυτός που έχει εικόνα το σημείο τομής των ευθειών $y = x - 2$ και της κάθετης $y = \lambda\cdot x$ σε αυτή, που περνάει από την αρχή των αξόνων, δηλαδή της $y=-x$. Λύνοντας το σύστημα $y=x-2$ και $y=-x$ βρίσκουμε x = 1, y = -1. Άρα $z_0 = 1 - i$.

ΘΕΜΑ 3

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.
α). Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.
β). Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1 + x)$, για κάθε $x \in R$.
γ). Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, 0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.
δ). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x = 3.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f: $f(x)=x^5+x^3+x$, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με :

$f'(x)=(x^5+x^3+x)'=5x^4+3x^2+1>0$, για κάθε $x \in R$.

Συνεπώς η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in R$.

$f''(x)=(5x^4+3x^2+1)'=20x^3+6x$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 20x^3+6x=0 \Leftrightarrow 2x(10x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=0$

διότι $10x^2+3>0$ για κάθε $x \in R$.

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2x(10x^2+3)>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f''(x)$	–	+
f(x)		

Κατασκευάζω πίνακα προσήμων για την $f''(x)$.
Για $x \in (-\infty, 0]$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, κοίλη
Για $x \in [0, +\infty)$ στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, κυρτή.
Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη τότε είναι «1 – 1». Συνεπώς έχει αντίστροφη.

β). Έστω η συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
Με $g'(x) = e^x - 1$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$

Κατασκευάζω πίνακα της $g'(x)$ και μονοτονίας της g(x).

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$g''(x)$	–	+
g(x)	↘	↗

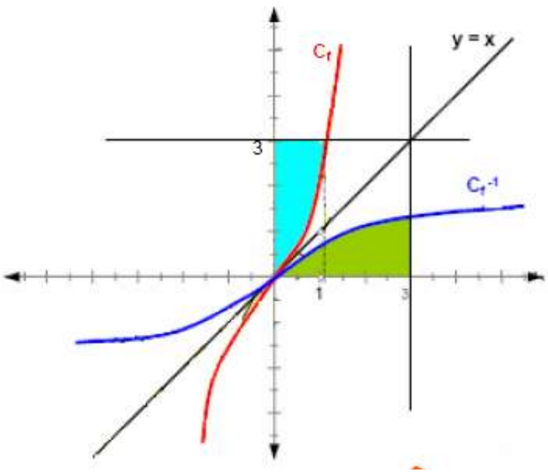
Άρα η g(x) στο σημείο x = 0 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το g(0) = 0.
Άρα ισχύει $g(x) \geq g(0)=0$, για κάθε $x \in R$. Συνεπώς $e^x-x-1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x+1$.
Επειδή f γνησίως αύξουσα $f(e^x) \geq f(x+1)$.

γ). Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Ο(0, 0) (ε) είναι : $y - f(0) = f'(0)\cdot x$, όπου f(0) = 0 και $f'(0) = 1$
Άρα y = x.
Από θεωρία γνωρίζουμε ότι : Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων f, f^{-1} είναι ως προς την ευθεία y = x.

δ). Επειδή οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι αντίστροφες, είναι συμμετρικές ως προς την y = x τότε :
Το σημείο τομής της x = 3 με την y = x είναι το (3, 3). Δηλαδή y = 3. Αναζητώ το σημείο τομής της C_f με την y = 3. Δηλαδή

$$f(x)=3 \Leftrightarrow x^5+x^3+x=3 \Leftrightarrow x^5+x^3+x-3=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)(x^4+x^3-2x^2+2x+3)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Το οποίο είναι μοναδικό αφού η f γνησίως αύξουσα.
Από το ζητούμενο εμβαδό είναι το:



$$E=\int_0^1(3-f(x))dx=\int_0^1\left(3-x^5-x^3-x\right)\cdot dx=\left[3x-\frac{x^6}{6}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{25}{12}.$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β). Αν ισχύει f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν αριθμοί $\gamma\in(\alpha,\beta)$, $\delta\in(\alpha,\beta)$, έτσι ώστε f(γ)·f(δ) < 0, να αποδείξετε ότι :
α). Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο διάστημα (α, β).
β). Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in$ (α, β) τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.
γ). Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

ΛΥΣΗ
Τρόπος 1
α). Επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β] και συνεπώς στο υποσύνολό του [γ, δ] (Έστω γ < δ χωρίς βλάβη της γενικότητας) έχουμε ότι : $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$. Από εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα ρ∈ (γ, δ) τέτοιο ώστε f(ρ) = 0.
Δηλαδή η f(x) = 0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β).

β). Η f είναι συνεχής στο [α, ρ] και παραγωγίσιμη στο (α, ρ) με f(α) = f(ρ) = 0. (Ερώτημα α).
Συνεπώς από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in$ (α, ρ) τέτοιο ώστε: $f'(\rho_1) = 0$ (I)
Όμοια η f είναι συνεχής στο [ρ, β] και παραγωγίσιμη στο (ρ, β) με f(β) = f(ρ) = 0. (Ερώτημα α).
Συνεπώς από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in$ (ρ, β) τέτοιο ώστε: $f'(\rho_2) = 0$ (II)
Έστω η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (α, β). Τότε η $f'(x)$ θα είναι γνησίως μονότονη. Άτοπο διότι από τις (I) και (II) η $f'(x)$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες, τις ρ_1, ρ_2, στο (α, β).
Στην περίπτωση όπου $f''(x) = 0$ για κάθε x ∈ (α, β) τότε η συνάρτηση $f'(x)$ θα ήταν σταθερή και ίση με το μηδέν. (Αφού υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in$ (α, β) : $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = 0$. Άρα η f σταθερή. Άτοπο διότι δεν θα ίσχυε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$ για γ, δ ∈ (α, β).
Άρα υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in$ (α, β): $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$.

γ). Η $f''(x)$ είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ με $f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2)<0$ (από ερώτημα β). Τότε από εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano στο (ξ_1, ξ_2) υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ τέτοιο ώστε: $f''(\xi) = 0$. Έστω ότι η $f''(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε περιοχή γύρω από το ξ. Άρα και στο (α, β). Άτοπο. Άρα υπάρχει περιοχή γύρω από το ξ στο οποίο η $f''(x)$ να αλλάζει πρόσημο. Το οποίο αποδεικνύει ότι η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο καμπής, δεδομένου ότι η $f''(x)$ είναι συνεχής στο (α, β) και η f παραγωγίσιμη στο (α, β).

τρόπος 2
α). Είναι $\gamma \neq \delta$, διότι αν $\gamma = \delta$ τότε $f(\gamma) = f(\delta)$ και $f(\gamma)\cdot f(\delta) = [f(\gamma)]^2 \geq 0$. (άτοπο διότι $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$).
Έστω $\gamma < \delta$, τότε :
$\rightarrow$ f συνεχής στο $[\gamma , \delta] \subseteq [\alpha , \beta]$.
$\rightarrow$ $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$. Από Θ . Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\gamma, \delta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.
Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β).

β). Έστω ότι $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$.
$\rightarrow$ f συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$.
$\rightarrow$ f παραγωγίσιμη στο (α, γ).
Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\eta_1 \in (\alpha, \gamma)$, τέτοιο ώστε $f'(\eta_1) = \dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} > 0$ (1)
$\rightarrow$ f συνεχής στο $[\gamma, x_0]$.
$\rightarrow$ f παραγωγίσιμη στο (γ, x_0).
Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\eta_2 \in (\gamma, x_0)$, τέτοιο ώστε $f'(\eta_2) = \dfrac{f(x_0)-f(\gamma)}{x_0-\gamma} < 0$ (2)
$\rightarrow$ f συνεχής στο $[x_0, \delta]$.
$\rightarrow$ f παραγωγίσιμη στο (x_0, δ).
Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\eta_3 \in (x_0, \delta)$, τέτοιο ώστε $f'(\eta_3) = \dfrac{f(\delta)-f(x_0)}{\delta-x_0} < 0$ (3)
$\rightarrow$ f συνεχής στο $[\delta , \beta]$.
$\rightarrow$ f παραγωγίσιμη στο (δ, β).
Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\eta_4 \in (\delta, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\eta_4) = \dfrac{f(\beta)-f(\delta)}{\beta-\delta} > 0$ (4)
$\rightarrow$ f' συνεχής στο $[\eta_1, \eta_2]$.
$\rightarrow$ f' παραγωγίσιμη στο (η_1, η_2).
Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\eta_1, \eta_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = \dfrac{f(\eta_2)-f(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1} < 0$
από (1) και (2)
$\rightarrow$ f' συνεχής στο $[\eta_3 , \eta_4]$.
$\rightarrow$ f' παραγωγίσιμη στο (η_3 , η_4).
Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\eta_3, \eta_4)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2) = \dfrac{f(\eta_4)-f(\eta_3)}{\eta_4-\eta_3} > 0$
από (3) και (4)

γ). $\rightarrow$ f'' συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$.
$\rightarrow$ $f'(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$ από (β) ερώτημα Από Θ. Bolzano η $f''(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ, που είναι θέση <u>πιθανού σημείου καμπής</u>.

ΣΧΟΛΙΟ : Το ότι ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f, είναι λανθασμένο διότι δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ξ. Η διατύπωση έπρεπε να είναι :
« γ). Υπάρχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής της γραφικής <u>παράστασης της f. »</u>.

γ) **<u>Επισήμανση 1η</u>** Τα δεδομένα του προβλήματος δεν επαρκούν για την απόδειξη της ύπαρξης τουλάχιστον ενός σημείου καμπής της f , όπως απαιτεί το σχετικό ερώτημα. Για του «λόγου το αληθές» παραθέτουμε (αντι)παράδειγμα συναρτήσεως που πληροί όλα τα επιτάγματα του προβλήματος και δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

<u>Αντιπαράδειγμα :</u> $$f(x)=\begin{cases} \eta\mu x & ,0\le x<\pi \\ -x+\pi & ,\pi\le x<2\pi \\ \eta\mu(x-\pi)-\pi & ,2\pi\le x<3\pi \\ x-4\pi & ,3\pi\le x\le 4\pi \end{cases}$$

<u>Επισήμανση 2η</u> Η απόδειξη της ύπαρξης σημείου καμπής της f (που είναι άλλωστε και η απαίτηση του γ. ερωτήματος) καθίσταται επιτυχής υπό την επιπλέον προϋπόθεση της μονοτονίας της f $''$ στο διάστημα (ξ_1,ξ_2) (ή στο (ξ_2,ξ_1)) ή ακόμα ασθενέστερα στο (α,β) .

<u>Επισήμανση 3η</u> Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, αυτό που είναι εφικτό να αποδειχθεί, είναι η ασθενέστερη συνθήκη της ύπαρξης τουλάχιστον ενός **<u>πιθανού</u>** σημείου καμπής της f.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 1

Α). Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α). όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

β). κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$.

Β). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

β). Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

γ). Μία συνάρτηση $f : A \to R$ είναι συνάρτηση 1 – 1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

δ). Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$f(x)\cdot g'(x)\cdot dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\cdot dx .$$

Γ). Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

ΛΥΣΗ

Α). Θέμα Θεωρίας.

Β). α). Σωστό, β). Λάθος, γ). Λάθος, δ). Σωστό.

Γ). Θέμα Θεωρία.

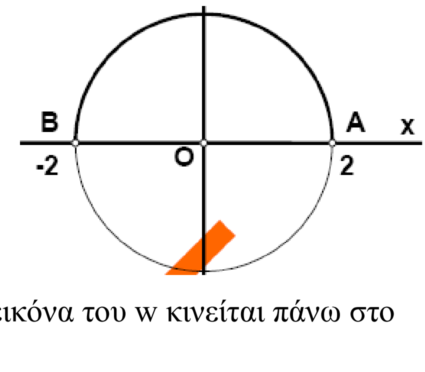
ΘΕΜΑ 2

α). Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z| = 2$ και $\mathrm{Im}(z) \ge 0$.

β). Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{4}{z}\right)$, κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα x′x .

ΛΥΣΗ

α) Είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Ο (0, 0) και ακτίνα 2 που βρίσκονται στον άξονα x′x ή πάνω από τον άξονα x′x.



β). $|z| = 2 \Rightarrow |z|^2 = 4 \Rightarrow z\cdot\bar{z} = 4 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

$$w = \frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{4}{z}\right) = \frac{1}{2}\ z+\bar{z}\ = \mathrm{Re}\ z\ .$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα το πραγματικό μέρος του z, άρα και η εικόνα του w κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ .

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

α). Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

β). Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$.

γ). Να αποδείξετε ότι $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x)=0$.

δ). Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot dx=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

ΛΥΣΗ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

β). $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x}=-2=\lambda.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}==\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0=\beta.$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της C_f, όταν το x τείνει στο $-\infty$, είναι η $y=-2\cdot x$.

γ). $$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

άρα $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x)=-\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}\sqrt{x^2+1}+f(x)=-f(x)+f(x)=0.$

δ). Από (γ) ερώτημα έχουμε : $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=-\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot dx=\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot dx=-\int_0^1\left(\ln f(x)\right)'\cdot dx=-\left[\ln f(x)\right]_0^1=-\left(\ln f(1)-\ln f(0)\right)=$$

$$=-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{-1}=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)=\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο IR με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.
α). Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
β). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.
γ). Έστω η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^o.

ΛΥΣΗ

α). Η f' είναι συνεχής στο R και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$.
Από συνέπειες Θ. Bolzano η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.
Επομένως η f είναι γνησίως μονότονη.

β). Είναι $f(x) = -f(2-x)$, για κάθε $x \in R$.
Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = -f(1) \Rightarrow 2\cdot f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$. Άρα το $x_0 = 1$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x_0 = 1$.

γ). Έστω ότι η C_g τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο $A(x_0, 0)$.

Πρέπει $g(x_0) = 0 \Rightarrow \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$, άρα $A(1, 0)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}-0}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{f'(x)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{1}{x-1}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{1}{f'(x)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} =$$

$$= f'(1)\cdot\frac{1}{f'(1)} = 1.$$

Διότι : $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(0)}{x-1} = f'(1)$ και $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 1}f'(x)} = \frac{1}{f'(1)}$.

άρα $g'(1) = 1 =$ εφ45^o, επομένως η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(1, 0)$, στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x′x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^o.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2004

ΜΑΪΟΣ 2004

ΘΕΜΑ 1

Α). Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f Παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$. Μονάδες 10

Β). Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ; Μονάδες 5

Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

β). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$

γ). Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f·g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g'(x_0)$.

δ). Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

ε). Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot dx = G(\beta) - G(\alpha)$

ΛΥΣΗ

Α). Θέμα Θεωρίας.

Β). Θέμα Θεωρίας.

Γ). α). ΣΩΣΤΟ, β). ΣΩΣΤΟ, γ). ΛΑΘΟΣ, δ). ΛΑΘΟΣ, ε). ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2\cdot\ln x$.

α). Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

β). Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

γ). Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ΛΥΣΗ

α). Πρέπει $x > 0$, άρα $D_f = (0, +\infty)$.

$$f'(x) = (x^2\cdot\ln x)' = (x^2)'\cdot\ln x + x^2\cdot(\ln x)' = 2\cdot x\cdot\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = 2\cdot x\cdot\ln x + x = x\cdot(2\cdot\ln x + 1).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x\cdot(2\cdot\ln x + 1) = 0 \Rightarrow 2\cdot\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	+∞
f ′(x)	–		+
f(x)	↘		↗

$$\text{Ολικό ελάχιστο } f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\cdot\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e}\cdot\ln e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

β). $f''(x) = [x\cdot(2\cdot\ln x + 1)]' = (x)'\cdot(2\cdot\ln x + 1) + x\cdot(2\cdot\ln x + 1)' = 2\cdot\ln x + 3$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 2\cdot\ln x + 3 = 0 \Rightarrow \ln x = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow x = e^{-3/2} = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$.

x	0	$\dfrac{1}{e\cdot\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

άρα έχει σημείο καμπής $A\left(\dfrac{1}{e\sqrt{e}}, -\dfrac{3}{2e^3}\right)$.

γ). $\rightarrow$ Στο διάστημα $\Delta_1 = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$, η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2\cdot\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = 0 \text{ και } f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}. \text{ Άρα } f(\Delta_1) = \left[-\frac{1}{2e}, 0\right)$$

$\rightarrow$ Στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\dfrac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2\cdot\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ και } f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}. \text{ Άρα } f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

Επομένως $f(A) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2) = \left[-\dfrac{1}{2e}, +\infty\right)$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x\cdot f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R και $f(0) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$.

α). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.

β). Εάν $f(x) = 2\cdot x^2 - 3\cdot x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_\alpha^0 g(x)\cdot dx$, $\alpha \in R$.

γ). Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to-\infty} I(\alpha)$

ΛΥΣΗ

α). $g'(x) = (e^x\cdot f(x))' = (e^x)'\cdot f(x) + e^x\cdot f'(x) = e^x\cdot(f(x) + f'(x))$

$\rightarrow$ η g είναι παραγωγίσιμη στο [0, 3/2].

$\rightarrow$ g (0) = g (3/2) = 0.

Από Θ. Rolle προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 3/2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{\xi}\cdot(f(\xi) + f'(\xi)) = 0 \Rightarrow f(\xi) + f'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = -f(\xi)$.

β). $I(\alpha) = \int_\alpha^0 g(x)\cdot dx = \int_\alpha^0 e^x\cdot f(x)\cdot dx = \int_\alpha^0 e^x\cdot(2x^2 - 3x)\cdot dx = \int_\alpha^0 (e^x)'\cdot(2x^2 - 3x)\cdot dx =$

Επεξεργασία Κειμένου : Πολυχρονιάδης Νικόλαος

$$= \left[e^x\cdot(2x^2-3x)\right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^x\cdot(2x^2-3x)'\cdot dx = 0 - e^\alpha\cdot(2\alpha^2-3\alpha) - \int_\alpha^0 e^x\cdot(4x-3)\cdot dx \qquad (1)$$

$$= \int_\alpha^0 e^x\cdot(4x-3)\cdot dx = \int_\alpha^0 (e^x)'\cdot(4x-3)\cdot dx = \left[e^x\cdot(4x-3)\right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^x\cdot(4x-3)'\cdot dx =$$

$$= -3 - e^\alpha\cdot(4\alpha-3) - \int_\alpha^0 4e^x\cdot dx = -3 - e^\alpha\cdot(4\alpha-3) - 4\cdot\left[e^x\right]_\alpha^0 = -3 - e^\alpha\cdot(4\alpha-3) - 4 + 4\cdot e^\alpha \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε : $I(\alpha) = -e^\alpha\cdot(2\cdot\alpha^2 - 3\cdot\alpha) + 3 + e^\alpha\cdot(4\cdot\alpha - 3) + 4 - 4\cdot e^\alpha =$
$= e^\alpha\cdot(-2\cdot\alpha^2 + 3\cdot\alpha + 4\cdot\alpha - 3 - 4) + 4 + 3 = e^\alpha\cdot(-2\cdot\alpha^2 + 7\cdot\alpha - 7) + 7.$

γ). $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}[e^\alpha\cdot(-2\cdot\alpha^2 + 7\cdot\alpha - 7) = \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\dfrac{-2\alpha^2+7\alpha-7}{e^{-\alpha}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\dfrac{(-2\alpha^2+7\alpha-7)'}{(e^{-\alpha})'} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\dfrac{-4\alpha+7}{-e^{-\alpha}} =$

$= \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\dfrac{-4}{e^{-\alpha}} = -4\cdot\lim\limits_{\alpha\to-\infty}e^\alpha = 0$.

Άρα $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = 7 + \lim\limits_{\alpha\to-\infty}[e^\alpha\cdot(-2\cdot\alpha^2 + 7\cdot\alpha - 7)] = 7 + 0 = 7.$

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: R → R τέτοια ώστε f(1) = 1. Αν για κάθε x ∈ R, ισχύει

g(x) = $\int_1^{x^3}|z|\cdot f(t)\cdot dt - 3\cdot\left|z+\dfrac{1}{z}\right|\cdot(x-1) \geq 0$, όπου $z = \alpha + \beta\cdot i \in C$, με α, β ∈ R*, τότε:

α). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε τη g′.

β). Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z+\dfrac{1}{z}\right|$

γ). Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $Re(z^2) = -\dfrac{1}{2}$

δ). Αν επιπλέον f(2) = α > 0, f(3) = β και α > β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ΛΥΣΗ

α). g(x) = $|z|\cdot\int_1^{x^3} f(t)\cdot dt - 3\cdot\left|z+\dfrac{1}{z}\right|\cdot(x-1)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Η h(x) = $|z|\cdot\int_1^{x} f(t)\cdot dt$, είναι παραγωγίσιμη στο R.

Η t(x) = x^3 είναι παραγωγίσιμη στο R. Η φ(x) = $|z|\cdot\int_1^{x^3} f(t)\cdot dt$, είναι παρ/μη στο R ως σύνθεση των h και t. Η S(x) = $3\cdot\left|z+\dfrac{1}{z}\right|\cdot(x-1)$, είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική Άρα η g είναι παρ/μη στο R ως διαφορά των παρ/μων φ και S.

$$g'(x) = \left[|z|\cdot\int_1^{x^3} f(t)\cdot dt - 3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right|\cdot(x-1)\right]' = |z|\cdot\left(\int_1^{x^3} f(t)\cdot dt\right)' - 3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right|\cdot(x-1)' =$$

$$= |z|\cdot f(x^3)\cdot 3x^2 - 3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right| = 3x^2\cdot|z|\cdot f(x^3) - 3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right|$$

β). Παρατηρούμε ότι g(x) = $\int_1^{x^3}|z|\cdot f\ \ t\ \ \cdot dt-3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right|\cdot\ \ x-1\ \ \ge 0=g\ \ 1\ \ ,$ για κάθε x $\in$ R.

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ και επειδή ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat, προκύπτει ότι g ′(1) = 0.

$g'(1) = 0 \Rightarrow 3\cdot|z|\cdot f(1) - 3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right| = 0 \Rightarrow |z| = \left|z+\frac{1}{z}\right|.$

γ). $|z|^2 = \left|z+\frac{1}{z}\right|^2 \Rightarrow 3\cdot z\cdot \bar{z} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right) \Rightarrow z\cdot\bar{z} = z\cdot\bar{z} + \frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}+\frac{1}{z\cdot\bar{z}} \Rightarrow$

$0 = \frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}+\frac{1}{z\cdot\bar{z}} \Rightarrow z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 0 \Rightarrow z^2+\overline{z^2} = -1 \Rightarrow 2\cdot\mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}.$

δ). Θα δείξουμε ότι β < 0. Είναι $\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow (\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta) < 0$.

Όμως α − β > 0 διότι α > β, άρα α + β < 0 ⇒ β < − α < 0.
→ Η f είναι συνεχής στο [2, 3].
→ f(2) = α > 0 και f(3) = β < 0.
Από Θ. Bolzano για την ί στο διάστημα [2, 3] προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2, 3)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2004

ΘΕΜΑ 1

Α). Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν
→ η f είναι συνεχής στο Δ και
→ $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Β). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β). Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

γ). Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού R και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

δ). Οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x′Oy′.

ε). Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in N$ και $k \geq 2$.

ΛΥΣΗ

Α). Θέμα Θεωρίας.

Β). α). Λάθος β). Σωστό γ). Λάθος, δ). Σωστό ε). Σωστό.

Γ). Θέμα Θεωρίας.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in R$, $m > 0$.

α). Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$.

β). Αν $m = 10$, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x′x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

ΛΥΣΗ

α). Είναι $f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R, με
$f'(x) = (2^x + \ln x - 4^x - 5^x)' = 2^x \cdot \ln 2 + m^x \cdot \ln m - 4^x \cdot \ln 4 - 5^x \cdot \ln 5$.
Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.
Από Θ.Fermat, $f'(0) = 0 \Rightarrow \ln 2 + \ln m - \ln 4 - \ln 5 = 0 \Rightarrow \ln 2 + \ln m = \ln 4 + \ln 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln 2m = \ln 20 \Rightarrow 2 \cdot m = 20 \Rightarrow m = 10$.

β). Για $m = 10$, είναι $f(x) = 2^x + 10^x - 4^x - 5^x$.

$$E = \int_0^1 |f(x)| \cdot dx = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 (2^x + 10^x - 4^x - 5^x) \cdot dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{5^x}{\ln 5} \right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{9}{\ln 10} - \frac{3}{\ln 4} - \frac{4}{\ln 5} \right) \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται μια συνάρτηση f: [α, β] → R συνεχής στο διάστημα [α, β] με f(x) ≠ 0 για κάθε x ∈ [α, β] και μιγαδικός αριθμός z με Re(z) ≠ 0, Im(z) ≠ 0 και |Re(z)| > |Im(z)|.

Αν $z+\dfrac{1}{z}=f(\alpha)$ και $z^2+\dfrac{1}{z^2}=f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α). |z| = 1.
β). $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$.
γ). η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (–1, 1).

ΛΥΣΗ

α). $z+\dfrac{1}{z}$ = f(α) ∈ R, άρα $\overline{z+\dfrac{1}{z}}=z+\dfrac{1}{z} \Rightarrow \overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}=z+\dfrac{1}{z} \Rightarrow \overline{z}\cdot z^2+z=z^2\cdot\overline{z}+\overline{z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{z}\cdot z^2-z^2\cdot\overline{z}+z-\overline{z}=0 \Rightarrow -\overline{z}\cdot z\ \ z-\overline{z}\ +\ z-\overline{z}\ =0 \Rightarrow 1-\overline{z}\cdot z\ \ z-\overline{z}\ =0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{z}\cdot z=1\ ,\ z=\overline{z} \Rightarrow |z|=1\ ,\ z=\overline{z}$.

β). $z+\dfrac{1}{z}$ = f(α) ⇒ $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2$ = $f^2(\alpha)$ ⇒ $z^2+\dfrac{1}{z^2}+2$ = $f^2(\alpha) \Rightarrow f^2(\beta)+2=f^2(\alpha)$, άρα $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$.

γ). Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = x^3\cdot f(\alpha) + f(\beta)$.
→ η g είναι συνεχής στο [–1, 1] ως πολυωνυμική.
→ g(–1) = –f(α) + f(β)
g(1) = f(α) + f(β)
g(–1)·g(1) = [–f(α) + f(β)]·[f(α) + f(β)] = $f^2(\beta) - f^2(\alpha) < 0$ από (β) από Θ. Bolzano η g(x) = 0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (–1, 1).

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0, + ∞) → R τέτοια, ώστε $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}} 2\cdot x\cdot f(2\cdot x\cdot t)\cdot dt$.

α). Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞).
β). Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - (x + 1)$.
γ). Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει μοναδική ρίζα στο [0, +∞).
δ). Να βρείτε τα όρια $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ΛΥΣΗ

α). στην f(x) = $\dfrac{x^2}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}} 2\cdot x\cdot f(2\cdot x\cdot t)\cdot dt = \dfrac{x^2}{2}+\int_0^x f(u)\cdot du$.

Θέτουμε : 2·x·t = u. Είναι : 2·x·dt = du. Όταν t = 0 ⇒ u = 0 και όταν t = $\dfrac{1}{2}$ ⇒ u = x.

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο (0 , +∞), ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

β). f ′(x) = $\left[\dfrac{x^2}{2}+\int_0^x f\ \ u\ \ \cdot du\right]' = x+f\ \ x$ ⇒ f ′(x) – f(x) = x ⇒ $f'(x)\cdot e^{-x} - f(x)\cdot e^{-x} = x\cdot e^{-x}$ ⇒

⇒ $[f(x)\cdot e^{-x}]' = x\cdot e^{-x}$.

Άρα $f(x)\cdot e^{-x} = \int x\cdot e^{-x}\cdot dx = \int x\cdot\ -e^{-x}\ '\cdot dx = -x\cdot e^{-x} - \int\ x\ '\cdot\ -e^{x}\ \cdot dx = -x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}\cdot dx =$

$= -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + c$ και $f(x) = \dfrac{-xe^{-x} - e^{-x} + c}{e^{-x}} \Rightarrow f(x) = -x - 1 + c\cdot e^{-x}$ (1)

Για x = 0 είναι $f(0) = \dfrac{0^2}{2} + \int_0^0 f(u)\cdot du = 0$.

(1) $\Rightarrow f(0) = -0 - 1 + c\cdot e^0 \Rightarrow 0 = c - 1 \Rightarrow c = 1$.
(1) $\Rightarrow f(x) = -x - 1 + e^x \Rightarrow f(x) = e^x - (x + 1)$.

γ). $f'(x) = e^x - 1 > 0$, για $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
άρα η f έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$ την $x = 0$.

δ). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1 - \dfrac{x+1}{e^x}\right)\right] = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

$\rightarrow$ το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ είναι κακώς ορισμένο διότι δεν υπάρχει διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha)$, με $\alpha \in R$, που να ορίζεται η f, αφού $D_f = [0, +\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ : Το ότι ζητήθηκε να υπολογιστεί ένα όριο που ήταν κακώς ορισμένο ήταν «περίεργο». Ίσως αγνοήθηκε ότι $D_f = [0, +\infty)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2005

ΜΑΪΟΣ 2005

ΘΕΜΑ 1

Α1) .Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β], Αν
- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$, δείξτε ότι για κάθε αριθμό n μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = n$.

Α2). Πότε η ευθεία $y = \lambda\cdot x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$

Β). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$. Μονάδες 2

β). Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ). Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

δ). Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = +\infty$.

ε). Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_\alpha^x f(t)\cdot dt\right)' = f(x) - f(\alpha)$, για κάθε $x \in \Delta$.

στ). Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

ΛΥΣΗ

Α1). Θέμα Θεωρίας

Α2). Θέμα Θεωρίας.

Β). α). ΛΑΘΟΣ, β). ΛΑΘΟΣ, γ). ΣΩΣΤΟ, δ). ΣΩΣΤΟ, ε). ΛΑΘΟΣ , στ). ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α). Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$.

β). Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός

γ). Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3}|z_1\cdot z_2 + z_2\cdot z_3 + z_3\cdot z_1|$

ΛΥΣΗ

α). $|z_1| = 3 \Rightarrow |z_1|^2 = 9 \Rightarrow z_1\cdot\overline{z_1} = 9 \Rightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$.

β). 1ος τρόπος

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}} + \frac{z_2\cdot\overline{z_1}}{z_1\cdot\overline{z_1}} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2} + \frac{z_2\cdot\overline{z_1}}{|z_1|^2} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{9} + \frac{z_2\cdot\overline{z_1}}{9} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_1}}{9} = \frac{2\operatorname{Re}(z_1\cdot\overline{z_2})}{9} \in R.$$

2ος τρόπος

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1}{z_2}+\frac{\frac{9}{\overline{z_2}}}{z_1\cdot\frac{9}{\overline{z_1}}}=\frac{z_1}{z_2}+\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{z_1}{z_2}+\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=2\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\in R.$$

3ος τρόπος

w = $\overline{w}$ ⇒ w − $\overline{w}$ = 0 ⇒ 2·Im(w) = 0 ⇒ w ∈ R.

$$\overline{\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}+\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}}+\frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}}=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$$, άρα $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$ ∈ R.

\- - - 99 9

γ). $|z_1 + z_2 + z_3|$ =

$$\left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right|=\left|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right|=\left|\frac{9}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right|=9\left|\frac{z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3z_1}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}\right|=9\cdot\frac{|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3z_1|}{|z_1\cdot z_2\cdot z_3|}=$$

$$=9\cdot\frac{|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3z_1|}{|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|}.$$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x) = $e^{\lambda\cdot x}$, λ > 0.
α). Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .
β). Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η y = λ·e·x. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.
γ). Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y′y, είναι Ε(λ) = $\frac{e-2}{2\cdot\lambda}$.
δ). Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\cdot\mathrm{E}\ \lambda}{2+\eta\mu\lambda}$

ΛΥΣΗ

α). f ′(x) = $(e^{\lambda\cdot x})'$ = $e^{\lambda\cdot x}$·(λ·x)′ = λ·$e^{\lambda\cdot x}$ > 0, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β). Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της Μ (x_0, f x_0) είναι
(ε) : y – f ′(x_0) = f ′(x_0)·(x – x_0) (1).
Ο(0, 0) ∈ (ε) άρα –f(x_0) = –f ′(x_0)·x_0 ⇒ – $e^{\lambda\cdot x}$ = – λ·x_0·$e^{\lambda\cdot x}$ ⇒ x_0 = $\frac{1}{\lambda}$.

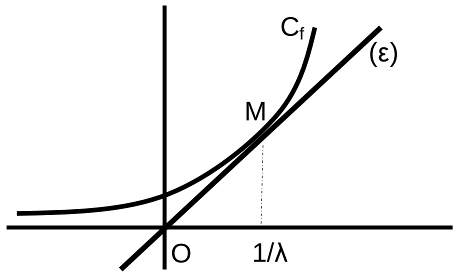
(1) ⇒ y – f$\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ = f ′$\left(\frac{1}{\lambda}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)$ ⇒ y – e = λ·e·$\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)$ ⇒ y = λ·e·x, σημείο επαφής

Μ$\left(\frac{1}{\lambda},f\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$ → Μ$\left(\frac{1}{\lambda},e\right)$.

γ). 1^{ος} τρόπος
Από το διπλανό σχήμα βλέπουμε ότι η C_f, βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (ε) άρα

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\lambda\cdot x} - e\cdot\lambda\cdot x \;\cdot dx = \left[\frac{e^{\lambda\cdot x}}{\lambda} - e\cdot\lambda\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} =$$

$$= \frac{e}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda}.$$



2^{ος} τρόπος
$f''(x) = (\lambda\cdot e^{\lambda\cdot x})' = \lambda\cdot e^{\lambda\cdot x}\cdot(\lambda\cdot x)' = \lambda^2\cdot e^{\lambda\cdot x} > 0$. άρα η f είναι κυρτή στο R.
Επομένως οποιαδήποτε εφαπτόμενη της C_f βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική παράσταση της f.
Δηλαδή $f(x) \geq e\cdot\lambda\cdot x$, για κάθε $x \in R$.

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\lambda\cdot x} - e\cdot\lambda\cdot x \;\cdot dx = \left[\frac{e^{\lambda\cdot x}}{\lambda} - e\cdot\lambda\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{e}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

δ). $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot E\;\lambda}{2+\eta\mu\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot\frac{e-2}{2\lambda}}{2+\eta\mu\lambda} = \dfrac{e-2}{2}\cdot\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda}{2+\eta\mu\lambda} = +\infty$, διότι :

→ είναι e > 2, άρα $\dfrac{e-2}{2} > 0$.

→ $-1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \eta\mu\lambda \leq 3 \Rightarrow 1 \geq \dfrac{1}{2+\eta\mu\lambda} \geq \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{\lambda}{3} \leq \dfrac{1}{2+\eta\mu\lambda} \leq \lambda$.   [λ > 0]

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda}{3} = +\infty$, άρα $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda}{2+\eta\mu\lambda} = +\infty$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2\cdot f'(x) = e^{x-f(x)}$, για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 0$.

α). Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$

β). Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f\;\;x-t\;\cdot dt}{\eta\mu x}$

γ). Δίδονται οι συναρτήσεις: $h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f\;\;t\;\cdot dt$ και $g(x) = \dfrac{x^{2.007}}{2.007}$.

Δείξτε ότι h(x) = g(x) για κάθε $x \in R$.

δ). Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f\;\;t\;\cdot dt = \dfrac{1}{2.008}$, έχει ακριβώς μία λύση στο (0, 1).

ΛΥΣΗ

α). $2\cdot f'(x) = e^{x-f(x)} \Rightarrow 2\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x) = e^x \Rightarrow [2\cdot e^{f(x)}]' = [e^x]'$ άρα $2\cdot e^{f(x)} = e^x + c$ (1)
(1) $\Rightarrow 2\cdot e^{f(0)} = e^0 + c \Rightarrow 2 = 1 + c \Rightarrow c = 1$.

(1) $\Rightarrow 2\cdot e^{f(x)} = e^x + 1 \Rightarrow e^{f(x)} = \dfrac{e^x+1}{2}$, άρα $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)$.

β). $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)\cdot dt}{\eta\mu x} \underset{\left[\begin{smallmatrix} t=0\to u=x \\ t=x\to u=0\end{smallmatrix}\right]}{\overset{\left[\begin{smallmatrix} u=x-t \\ dt=-du\end{smallmatrix}\right]}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\int_x^0 f(u)\cdot du}{\eta\mu x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\cdot du}{\eta\mu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(u)\cdot du\right)'}{(\eta\mu x)'} =$$

$$= = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \overset{f-\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=} \frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

(*) Η συνάρτηση $Q(x) = \int_0^x f(u)\cdot du$, είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη με

$Q'(x) = \left(\int_0^x f(u)\cdot du\right)' = f(x)$.

γ). $h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)\cdot dt = \int_0^x t^{2005}\cdot f(t)\cdot dt - \int_0^{-x} t^{2005}\cdot f(t)\cdot dt$.

$$h'(x) = \left(\int_0^x t^{2005}\cdot f(t)\cdot dt - \int_0^{-x} t^{2005}\cdot f(t)\cdot dt\right)' = \left(\int_0^x t^{2005}\cdot f(t)\cdot dt\right)' - \left(\int_0^{-x} t^{2005}\cdot f(t)\cdot dt\right)' =$$

$$= x^{2005}\cdot f(x) - (-x)^{2005}\cdot f(-x)\cdot(-x)' = x^{2005}\cdot[f(x) - f(-x)] = x^{2005}\cdot\left[\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right) - \ln\left(\frac{e^{-x}+1}{2}\right)\right]$$

$$= x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{\frac{e^x+1}{2}}{\frac{e^{-x}+1}{2}}\right) = x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{e^x+1}{\frac{1}{e^x}+1}\right) = x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{e^x+1}{\frac{1+e^x}{e^x}}\right) = x^{2005}\cdot\ln e^x = x\cdot x^{2005} = x^{2006}.$$

$g'(x) = \left(\dfrac{x^{2007}}{2007}\right)' = x^{2006}$, επομένως $h'(x) = g'(x)$, άρα $h(x) = g(x) + c$ και επειδή $h(0) = g(0) = 0$ τότε $c = 0$. Άρα $h(x) = g(x)$.

δ). Από το (γ) ερώτημα η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $g(x) = \dfrac{1}{2008}$.

1ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = g(x) - \dfrac{1}{2008}$.

→ φ συνεχής στο [0, 1] ως διαφορά συνεχών

→ $\varphi(0) = g(0) - \dfrac{1}{2008} = -\dfrac{1}{2008} < 0$ και $\varphi(1) = g(1) - \dfrac{1}{2008} = = \dfrac{1}{2007} - \dfrac{1}{2008} > 0$

Άρα $\varphi(0)\cdot\varphi(1) < 0$. από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$. (2)

$\varphi'(x) = g'(x) = x^{2006} > 0$ στο (0, 1) άρα η $\varphi(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση στο (0, 1) (3)

Από (2) και (3) η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο (0, 1).

2ος τρόπος

→ g συνεχής στο [0, 1] ως διαφορά συνεχών

$\to$ g(0) = 0, g(1) = $\frac{1}{2007}$ και g(0) = 0 < $\frac{1}{2008} < \frac{1}{2007} = g\ 1$.   (1)

από Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = \frac{1}{2008}$ (4)

$g'(x) = x^{2006} > 0$ στο (0, 1). άρα η $g(x) = \frac{1}{2008}$, έχει το πολύ μια λύση στο (0, 1)   (5)

Από (4) , (5) η εξίσωση $g(x) = \frac{1}{2008}$, έχει ακριβώς μια λύση στο (0, 1).

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 1

Α1). Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Α2). Πότε μια συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται "1 – 1";

Β). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

β). Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

γ). Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

δ). Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά $fog \neq gof$.

ε). Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών z, $\bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x′x.

στ). Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in R^*$, τότε ισχύει:

ΛΥΣΗ

Α1). Θέμα Θεωρίας.

Α2) Θέμα Θεωρίας.

Β). α). Σωστό, β). Λάθος, γ). Σωστό, δ). Λάθος, ε). Σωστό, στ). Σωστό.

ΘΕΜΑ 2

α). Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1 + z_2 = 4 + 4\cdot i$ και $2\cdot z_1 - \overline{z_2} = 5 + 5\cdot i$, να βρείτε τους z_1, z_2.

β). Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $|z - 1 - 3\cdot i| \leq \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$:

i). να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z = w και

ii).να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

ΛΥΣΗ

α). Έστω $z_1 = x + y\cdot i$ και $z_2 = \alpha + \beta\cdot i$. Τότε $z_1 + z_2 = 4 + 4\cdot i \Rightarrow (x + \alpha) + (y + \beta)\cdot i = 4 + 4\, i \Rightarrow$

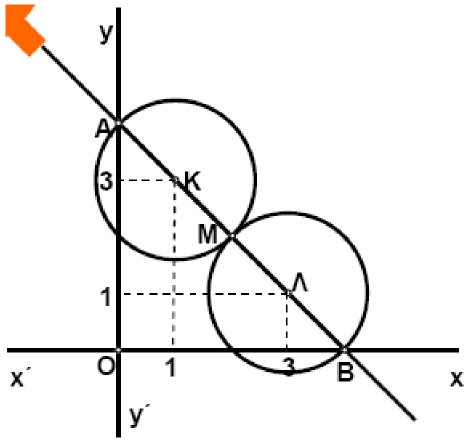
$$\Rightarrow \begin{cases} x + \alpha = 4 & 1 \\ y + \beta = 4 & 2 \end{cases}$$

$$2\cdot z_1 - \bar{z} = 5 + 5\cdot i \Rightarrow (2\cdot x - \alpha) + (2\cdot y + \beta)\cdot i = 5 + 5\, i \Rightarrow \begin{cases} 2x - \alpha = 5 & 3 \\ 2y + \beta = 5 & 4 \end{cases}.$$

Από (1) , (3) $\Rightarrow$ {x = 3 , α = 1} και από (2) , (4) $\Rightarrow$ {y = 1 , β = 3 }.

Άρα $z_1 = 3 + i$ και $z_2 = 1 + 3\cdot i$.

β). i). Η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο με κέντρο K (1, 3) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$, ενώ η εικόνα του μιγαδικού w βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο με κέντρο Λ(3, 1) και ακτίνα $R = \sqrt{2}$.
$(ΚΛ) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\cdot\sqrt{2} = R + \rho$, άρα οι κυκλικοί δίσκοι εφάπτονται εξωτερικά, δηλαδή υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w, έτσι ώστε z = w.
(στο σχήμα η εικόνα τους είναι το κοινό σημείο των κυκλικών δίσκων).



ii). Η μέγιστη τιμή του $|z - w|$ είναι η απόσταση (AB), όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και είναι ίση με $2\cdot R + 2\cdot\rho = 4\cdot\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.
α). Να δείξετε ότι η f είναι "1 – 1".
β). Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία A(1, 2005) και B(–2, 1), να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$.
γ). Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y = -\dfrac{1}{668}\cdot x + 2005$.

ΛΥΣΗ

α). Έστω ότι η f δεν είναι "1 – 1". Τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in R$, με $\alpha < \beta$ και $f(\alpha) = f(\beta)$.
Από Θ. Rolle στο [α , β], υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
Άτοπο διότι $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$. Άρα η η f είναι "1 – 1".

β). Τα σημεία A(1, 2005) και B(–2, 1) είναι σημεία της C_f άρα $f(1) = 2005$ και $f(-2) = 1$.
$f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$ άρα $f(f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8))) = f(-2) \Rightarrow -2004 + f(x^2 - 8) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x^2 - 8) = 2005 \Rightarrow f(x^2 - 8) = f(1)$ και επειδή η f είναι "1 – 1" θα είναι $x^2 - 8 = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pm 3$.

γ). Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [–2, 1]. Από Θ. Μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-2, 1)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \dfrac{f(1) - f(-2)}{2 - (-2)} = \dfrac{2005 - 1}{1 + 2} = \dfrac{2004}{3} = 668$ και $\lambda_\varepsilon = -\dfrac{1}{668}$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M $(x_0, f(x_0))$ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε).

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: R → R, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2} = 2005$.

α). Να δείξετε ότι:

i). f(0) = 0

ii). f ′(0) = 1.

β). Να βρείτε το λ ∈ R έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda\left[f(x)\right]^2}{2x^2+\left[f(x)\right]^2} = 3$.

γ). Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο R και f ′(x) > f(x), για κάθε x ∈ R να δείξετε ότι:

i). $x\cdot f(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

ii). $\int_0^1 f(x)\cdot dx < f(1)$.

ΛΥΣΗ

α). i). Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = \dfrac{f(x)-x}{x^2}$, $x \neq 0$.

Είναι $f(x) = x^2\cdot g(x) + x$, και επειδή η f είναι συνεχής στο R, θα είναι

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[x^2\cdot g(x) + x] = 0$.

ii). $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 g(x)+x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot g(x)+1\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0} x\cdot \lim\limits_{x\to 0} g(x) + 1 = 0\cdot 2005 + 1 = 1$.

β). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda\left[f(x)\right]^2}{2x^2+\left[f(x)\right]^2} = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{x^2}+\lambda\dfrac{\left[f(x)\right]^2}{x^2}}{2\cdot\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{\left[f(x)\right]^2}{x^2}} = 3 \Rightarrow \dfrac{1+\lambda\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\right)^2}{2+\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\right)^2} = 3 \Rightarrow$

$= \dfrac{1+\lambda\cdot 1^2}{2+1^2} = 3 \Rightarrow \dfrac{1+\lambda}{3} = 3 \Rightarrow \lambda + 1 = 9 \Rightarrow \lambda = 8$.

γ). i). Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x)\cdot e^{-x}$.

Είναι $g(x) = (f'(x) - f(x))\cdot e^{-x} > 0$, διότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε x ∈ R. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο R.

→ $x < 0 \Rightarrow g'(x) < g(0) \Rightarrow f(x)\cdot e^{-x} < 0$, άρα $f(x) < 0$ και $x\cdot f(x) > 0$.

→ $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow f(x)\cdot e^{-x} > 0$, άρα $f(x) > 0$ και $x\cdot f(x) > 0$. Άρα $x\cdot f(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

ii). Είναι $f'(x) - f(x) > 0$, για κάθε x ∈ R.

Άρα $\int_0^1\left[f'(x)-f(x)\right]\cdot dx > 0 \Rightarrow \int_0^1 f'(x)\cdot dx - \int_0^1 f(x)\cdot dx > 0 \Rightarrow \left[f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)\cdot dx > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1) - f(0) > \int_0^1 f(x)\cdot dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)\cdot dx < f(1)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2006

ΜΑΪΟΣ 2006

ΘΕΜΑ 1

Α1). Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

→ Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

→ Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Α2). Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Β). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

β). Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

γ). Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

δ). Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x\cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in R$.

ε). Ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)\cdot dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g(x)\cdot dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β].

ΛΥΣΗ

Α1). Θέμα Θεωρίας

Α2). Θέμα Θεωρίας.

Β). α). ΛΑΘΟΣ, β). ΣΩΣΤΟ, γ). ΣΩΣΤΟ, δ). ΛΑΘΟΣ, ε). ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$, με $x \geq 2$.

α). Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 – 1.

β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

γ). i). Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y = x.

ii).Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

ΛΥΣΗ

α). $1^{ος}$ τρόπος

$f'(x) = 2\cdot(x-2)$, $x \geq 2$. Είναι $f'(x) > 0$ για $x > 2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$. Επομένως η f είναι «1 – 1».

$2^{ος}$ τρόπος

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2 + (x_1-2)^2 = 2 + (x_2-2)^2 \Rightarrow (x_1-2)^2 = (x_2-2)^2 \Rightarrow |x_1-2| = |x_2-2|$ και $x_1 > 2$, $x_2 > 2$ άρα $x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Επομένως η f είναι «1 – 1».

β). Η f είναι «1 – 1» άρα η f είναι αντιστρέψιμη. $y = 2 + (x-2)^2 \Rightarrow y - 2 = (x-2)^2$.
πρέπει $y \geq 2$, $x - 2 = \sqrt{y-2} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{y-2}$. Άρα $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{y-2}$, $x \geq 2$.

γ). i). Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και $y = x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 + (x-2)^2 = x \Rightarrow x^2 - 5\cdot x + 6 = 0 \Rightarrow \{ x = 2$ ή $x = 3 \}$.
Άρα τα κοινά σημεία των C_f και $y = x$ είναι τα Α(2, 2) και Β(3, 3).
Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_{f-1} και $y = x$ λύνουμε την εξίσωση
$f^{-1}(x) = x \Rightarrow 2 + \sqrt{x-2} = x \Rightarrow \sqrt{x-2}\ 2 = x - 2 \Rightarrow x - 2 = x^2 - 4\cdot x + 4 \Rightarrow x^2 - 5\cdot x + 6 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{ x = 2$ ή $x = 3\}$. Άρα τα κοινά σημεία των C_f^{-1} και $y = x$ είναι τα Α(2, 2) και Β(3, 3).

ii). Οι f και f^{-1} είναι συνεχείς στο [2, – 3].
Αναζητούμε το πρόσημο της $\Delta(x) = f(x) - f^{-1}(x) = (x-2)^2 - \sqrt{x-2}$.

1ος τρόπος
$\Delta(x) \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2 - \sqrt{x-2} > 0 \Rightarrow (x-2)^2 \geq \sqrt{x-2} \Rightarrow (x-2)^4 \geq x - 2 \Rightarrow (x-2)^4 - (x-2) \geq 0$
$\Rightarrow (x-2)\cdot[(x-2)^3 - 1] \geq 0 \Rightarrow (x-2)^3 - 1 \geq 0 \Rightarrow (x-2)^3 \geq 1 \Rightarrow x - 2 \geq \Rightarrow x \geq 3$.
Άρα $\Delta(x) \leq 0$, στο [2 , 3].

2ος τρόπος
Από προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι οι C_f , C_f^{-1} τέμνονται στα Α(2, 2) και Β(3, 3), άρα η Δ(x) έχει μοναδικές ρίζες τις 2 και 3. Στο διάστημα (2, 3) η συνεχής Δ(x) διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$\Delta\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) - f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 2 + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 - \sqrt{\frac{5}{2} - 2} = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}} < 0.$$

Δ = f - f 1 = 2 + - 2 - 2 -.I— - 2 = -1 — < 0
Άρα $\Delta(x) \leq 0$, στο [2, 3].

$$E = -\int_2^3 \Delta(x)\cdot dx = -\int_2^3\left[(x-2)^2 - \sqrt{x-2}\right]\cdot dx = -\left(\int_2^3 (x-2)^2\cdot dx - \int_2^3 \sqrt{x-2}\cdot dx\right) =$$

$$= \int_2^3 \sqrt{x-2}\cdot dx - \int_2^3 (x-2)^2\cdot dx = \left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x-2)^3}\right]_2^3 - \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_2^3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.
α). Να αποδείξετε ότι :
i). $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.
ii). $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_1}) \geq -1$.
β). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

ΛΥΣΗ
1η λύση
α). i). Θα δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$. Είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_1 = -z_2 - z_3$.
$|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| \Rightarrow |-z_2 - z_3 - z_2| = |z_3 + z_2 + z_3| \Rightarrow |2\cdot z_2 + z_3| = |2\cdot z_3 + z_2| \Rightarrow$
$\Rightarrow |2\cdot z_2 + z_3|^2 = |2\cdot z_3 + z_2|^2 \Rightarrow (2\cdot z_2 + z_3)\cdot(2\cdot\overline{z}_2 + \overline{z}_3) = (2\cdot z_3 + z_2)\cdot(2\cdot\overline{z}_3 + \overline{z}_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow 4\cdot z_2\cdot\overline{z}_2 + 2\cdot z_2\cdot\overline{z}_3 + 2\cdot\overline{z}_2\cdot z_3 + z_3\cdot\overline{z}_3 = 4\cdot z_3\cdot\overline{z}_3 + 2\cdot z_2\cdot\overline{z}_3 + 2\cdot\overline{z}\cdot z_3 + z_2\cdot\overline{z}_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3\cdot z_2\cdot\overline{z}_2 = 3\cdot z_3\cdot\overline{z}_3 \Rightarrow 3\cdot|z_2| = 3\cdot|z_3| \Rightarrow 3 = 3$ που ισχύει.
Ομοίως δείχνουμε ότι $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

ii). $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2| = 1 + 1 = 2$, άρα $|z_1 - z_2|^2 \le 4 \Rightarrow (z_1 - z_2)\cdot(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \le 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow z_1\cdot\bar{z}_1 - z_1\cdot\bar{z}_2 - \bar{z}_1\cdot z_2 + z_2\cdot\bar{z}_2 \le 4 \Rightarrow |z_1|^2 - (z_1\cdot\bar{z}_2 - z_1\cdot\bar{z}_2) + |z_2|^2 \le 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - 2\cdot\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2) + 1 \le 4 \Rightarrow -2\cdot\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2) \le -2 \Rightarrow \mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2) \ge -1$.

$2^η$ λύση
α). i). Είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 = -z_3$.
$|z_1 + z_2| = |-z_3| \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = z_3^2 \Rightarrow (z_1 + z_2)\cdot(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow z_1\cdot\bar{z}_1 + z_1\cdot\bar{z}_2 + \bar{z}_1\cdot z_2 + z_2\cdot\bar{z}_2 = 1 \Rightarrow ||z_1| + (z_1\cdot\bar{z}_2 + \bar{z}_1\cdot z_2) + |z_2|^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + 2\cdot\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2) + 1 = 1 \Rightarrow 2\cdot\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2) = -1 \Rightarrow \mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2) = -\dfrac{1}{2}$ (1)
$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\cdot(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1\cdot\bar{z}_1 - z_1\cdot\bar{z}_2 - \bar{z}_1\cdot z_2 + z_2\cdot z_2 =$
$= |z_1|^2 - (z_1\cdot\bar{z}_2 + \bar{z}_1\cdot z_2) + |z_2|^2 = 1 - 2\cdot\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2) + 1 = 3$. άρα $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$.
Ομοίως δείχνουμε ότι $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}$.

ii) Είναι $|z_1 - z_2|^2 = \sqrt{3}^{\,2} = 3 \le 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2) = -\dfrac{1}{2} \ge -1$.

α). i). Αποδεικνύω ότι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\cdot|z_1|^2 + 2\cdot|z_2|^2$.
Είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 = -z_3$
Άρα $|-z_3| + |z_1 - z_2| = 2\cdot|z_1| + 2\cdot|z_2| \Rightarrow 1 + |z_1 - z_2|^2 = 2 + 2 \Rightarrow$
$|z_1 - z_2| = 3 \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Ομοίως $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}$, άρα
$|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

ii). Είναι $|z_1 - z_2|^2 = (\sqrt{3}) = 3 \le 4$ και $|z_1 - z_2|^2 = 3 \Rightarrow (z_1 - z_2)\cdot(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow z_1\cdot\bar{z}_1 - z_1\cdot\bar{z}_2 - \bar{z}_1\cdot z_2 + z_2\cdot\bar{z}_2 = 3 \Rightarrow |z_1|^2 - (z_1\cdot\bar{z}_2 - z_2\cdot\bar{z}_2) + |z_2|^2 = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - 2\cdot\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2) + 1 = 3 \Rightarrow -2\cdot\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2) = 1 \Rightarrow \mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2) = -\dfrac{1}{2} \ge -1$.

β). Οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι σημεία του μοναδιαίου κύκλου και επειδή $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - \ln x$
α). Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.
γ). Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $Α(α, \ln α)$ με $α > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $Β(β, e^β)$ με $β \in R$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0.
δ). Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

ΛΥΣΗ
α). Πρέπει $x \ne 1$ και $x > 0$. Άρα $D_f = (0, 1)\cup(1, +\infty)$.
$f'(x) = \dfrac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x} < 0$, για $x \in D_f$.
Άρα f γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα (0, 1) και (1, +∞).

→ Στο $\Delta_1 = (0, 1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = +\infty,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = -\infty.$$ άρα $f(\Delta_1) = R$

→ Στο $\Delta_2 = (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = +\infty,\quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = -\infty.$$ Άρα $f(\Delta_2) = R$.

Επομένως το σύνολο τιμών είναι $f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = R$.

β).→ $0 \in f(\Delta_1)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1. Άρα η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1

→ $0 \in f(\Delta_2)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ_2.

Άρα η $f(x) = 0$, έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2.

Επομένως η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο D_f.

γ). $1^{ος}$ τρόπος

$g'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ και $h'(x) = e^x$, $x \in R$. Βρίσκουμε την εφαπτόμενη (ε) της C_g στο Α (α, lnα)

(ε) : $y - g(\alpha) = g'(\alpha)\cdot(x - \alpha) \Rightarrow$ (ε) : $y - \ln\alpha = -(x - \alpha)$

Η (ε) είναι και εφαπτομένη της C_h στο Β.

Άρα $\lambda_\varepsilon = g'(\alpha) = h'(\beta)$ άρα $\frac{1}{\alpha} = e^\beta$ ή $\beta = -\ln\alpha$ (1)

$B \in (\varepsilon)$ άρα $e^\beta - \ln\alpha = \frac{1}{\alpha}\cdot(\beta - \alpha) \Rightarrow -\ln\alpha = \frac{1}{\alpha}\cdot(-\ln\alpha - \alpha) \Rightarrow 1 - \alpha\cdot\ln\alpha = -\ln\alpha - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha + 1 = (\alpha - 1)\cdot\ln\alpha \Rightarrow \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \ln\alpha = 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0$, άρα η α είναι ρίζα της $f(x) = 0$.

Σχόλιο: Αν $\alpha = 1$ τότε η εφαπτομένη της C_g στο Α (1 , 0) είναι η $y = x + 1$, και δεν ταυτίζονται.

Άρα $\alpha \neq 1$.

$2^{ος}$ τρόπος

$g'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ και $h'(x) = e^x$, $x \in R$. Βρίσκουμε την εφαπτόμενη (ε_1) της C_g στο Α (α, lnα)

(ε_1) : $y - g(\alpha) = g'(\alpha)\cdot(x - \alpha) \Rightarrow$ (ε) : $y = \frac{1}{\alpha}\cdot x - 1 + \ln\alpha$

Βρίσκουμε και την εφαπτόμενη (ε_2) της C_h στο Β (β, e^β). (ε_2) : $y - h(\beta) = h'(\beta)\cdot(x - \beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varepsilon_2) : y = e^\beta\cdot x - \beta\cdot e^\beta + e^\beta$. Για να ταυτίζονται οι (ε_1) και (ε_2) πρέπει :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\alpha} = e^\beta \\ -1 + \ln\alpha = -\beta\cdot e^\beta + e^\beta \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}$$

. Από (1) και (2) έχουμε : $-1 + \ln\alpha = \ln\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \ln\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \ln\alpha = 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow$ άρα το α είναι ρίζα της $f(x) = 0$.

Αν $\alpha = 1$ τότε η εφαπτομένη της C_g στο Α(1, 0) είναι η $y = x - 1$, ενώ η εφαπτομένη της C_h στο Β (0, 1) είναι η $y = x + 1$ και δεν ταυτίζονται. Άρα $\alpha \neq 1$.

δ). Από το (γ) ερώτημα προκύπτει ότι το πλήθος των κοινών εφαπτόμενων των C_g και C_h ισούται με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$. Από το (β) ερώτημα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες άρα οι C_g και C_h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2006

ΘΕΜΑ 1

Α1). Να αποδείξετε ότι: $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$, $x \in R$.
Α2). Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;
Β). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
α). Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2|$.
β). Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)\cdot g'(x_0) - f'(x_0)\cdot g(x_0)}{g^2(x_0)}$.
γ). Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $[\ln x]' = \frac{1}{x}$.
δ). Μια συνάρτηση $f : A \to R$ είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
ε). Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot dx = G(\alpha) - G(\beta)$.

ΛΥΣΗ

Α1). Θέμα Θεωρίας Θεωρία, σελίδα 23
Β). α). ΣΩΣΤΟ, β). ΛΑΘΟΣ, γ). ΣΩΣΤΟ, δ). ΣΩΣΤΟ, ε). ΛΑΘΟΣ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x \in R$.
α). Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο R.
β). Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{f(x)}\cdot dx$.
γ). Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι: $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$.

ΛΥΣΗ

$$f'(x) = \left(\frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}\right)' = \frac{(1+e^x)'(1+e^{x+1}) - (1+e^x)(1+e^{x+1})'}{(1+e^{x+1})^2} = \frac{e^x(1+e^{x+1}) - e^{x+1}(1+e^x)}{(1+e^{x+1})^2} =$$

$$= \frac{e^x + e^{2x+1} - e^{x+1} - e^{2x+1}}{(1+e^{x+1})^2} = \frac{e^x(1-e)}{(1+e^{x+1})^2} < 0.$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

β). $$\int \frac{1}{f(x)}\cdot dx = \int \frac{1+e^{x+1}}{1+e^x}\cdot dx = \int \frac{1+e^x - e^x + e\cdot e^x}{1+e^x}\cdot dx = \int \frac{1+e^x}{1+e^x}\cdot dx + \int \frac{(e-1)\cdot e^x}{1+e^x}\cdot dx =$$

$$= \int 1\cdot dx + (e-1)\cdot\int \frac{e^x}{1+e^x}\cdot dx = x + (e-1)\cdot\ln(1+e^x) + c.$$

γ). Είναι $0 < \frac{5}{6} < 1$, άρα για $x < 0$ είναι $\left(\frac{5}{6}\right)^x > \left(\frac{5}{6}\right)^0 \Rightarrow \frac{5^x}{6^x} > 1 \Rightarrow 5^x > 6^x$ και επειδή η f είναι γν. φθίνουσα $f(5^x) < f(6^x)$ (1)

Όμοια $0 < \frac{7}{8} < 1$ άρα για $x < 0$ είναι : $\left(\frac{7}{8}\right)^x > \left(\frac{7}{8}\right)^0 \Rightarrow \frac{7^x}{8^x} > 1 \Rightarrow 7^x > 8^x$ και επειδή η f είναι γν. φθίνουσα $f(7^x) < f(8^x)$ (2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$.

ΘΕΜΑ 3

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4 - z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + x + α$, $α \in R$.

α). Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x = 2$.

β). Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία $x = 2$ τέμνει τον άξονα y′y στο $y_0 = -3$, τότε

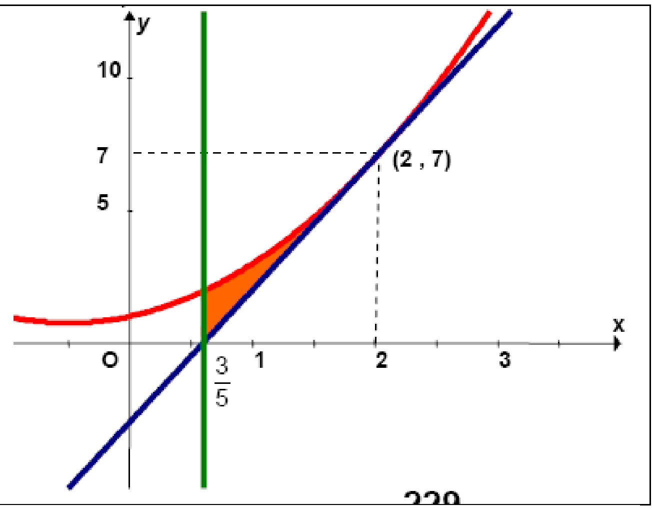
i). να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

ii). να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x′x και της ευθείας $x = \frac{3}{5}$.

ΛΥΣΗ

α). $(4 - z)^{10} = z^{10} \Rightarrow |(4 - z)^{10}| = |z^{10}| \Rightarrow |4 - z|^{10} = |z|^{10} \Rightarrow |4 - z| = |z| \Rightarrow |4 - z|^2 = |z| \Rightarrow$
$\Rightarrow (4 - z)\cdot(4 - \bar{z}) = z\cdot\bar{z} \Rightarrow 16 - 4\cdot\bar{z} - 4\cdot z + z\cdot\bar{z} = z\cdot\bar{z} \Rightarrow 4\cdot(z + \bar{z}) = 16 \Rightarrow 2\cdot Re(z) = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow Re(z) = 2$. Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x = 2$.

β) i). Είναι $f'(x) = 2\cdot x + 1$. Επίσης $f(2) = 6 + α$ και $f'(2) = 5$.
(ε) : $y - f(2) = f'(2)\cdot(x - 2) \Rightarrow$ (ε) : $y = 5\cdot x + α - 4 \Rightarrow A(0, -3) \in$ (ε) $\Rightarrow α = 1$.
Για $α = 1$ είναι (ε) : $y = 5\cdot x - 3$.
ii). Σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και την κατακόρυφη ευθεία $x = \frac{3}{5}$, το ζητούμενο εμβαδόν (γραμμοσκιασμένο χωρίο) είναι :



$$E = \int_{\frac{3}{5}}^{2} \left[f(x) - (5x - 3) \right]\cdot dx = \int_{\frac{3}{5}}^{2} (x^2 + x + 1 - 5x + 3)\cdot dx = \int_{\frac{3}{5}}^{2} (x^2 - 4x + 4)\cdot dx = \int_{\frac{3}{5}}^{2} (x - 2)^2\cdot dx =$$

$$\left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_{\frac{3}{5}}^{2} = 0 - \frac{\left(\frac{3}{5} - 2\right)^3}{3} = \frac{343}{375} \text{ τ.μ.}$$

ΣΧΟΛΙΟ : Το ότι στην εκφώνηση της άσκησης για τον υπολογισμό του εμβαδού του χωρίου αναφερόταν και ο άξονας x′x ήταν <u>περιττό στοιχείο</u> και μάλλον μπέρδευε τους μαθητές.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\cdot\ln(x + 1) - (x + 1)\cdot\ln x$, με $x > 0$.

α). i). Να αποδείξετε ότι: $\ln(x + 1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x>0$.

ii). Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

β). Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

γ). Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε $(\alpha + 1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha+1}$.

ΛΥΣΗ

α) i). Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = \ln x$, $x > 0$. $g'(x) = x$, $x > 0$.
Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. με τη g στο $[x , x + 1]$.
Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x , x + 1)$, τέτοιο ώστε :

$g'(x_0) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{1} = \ln(x+1) - \ln x$. Άρα $\frac{1}{x_0} = \ln(x + 1) - \ln x$.

Αρκεί να δείξω ότι $\frac{1}{x_0} < \frac{1}{x}$, το οποίο ισχύει διότι $x < x_0$. Επομένως $\ln(x + 1) - \ln x < -\frac{1}{x}$.

ii). $f'(x) = [x\cdot\ln(x + 1) - (x + 1)\cdot\ln x]' = \ln(x + 1) + x\cdot\frac{1}{x+1} - \ln x - (x + 1)\cdot\frac{1}{x} =$

$= \ln(x + 1) + \frac{x}{x+1} - \ln x - 1 - \frac{1}{x} = \ln(x + 1) - \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} < 0.$

διότι $\ln(x + 1) - \ln x - \frac{1}{x} < 0$ από α.i) ερώτημα και $-\frac{1}{x+1} < 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0 , +\infty)$.

β). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] \overset{+\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$

γ). για $\alpha > 0$, έχουμε : $(\alpha + 1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha+1} \Rightarrow \ln(\alpha + 1)^{\alpha} = \ln\alpha^{\alpha+1} \Rightarrow \alpha\cdot\ln(\alpha + 1) = (\alpha + 1)\cdot\ln\alpha$
$\Rightarrow \alpha\cdot\ln(\alpha + 1) - (\alpha + 1)\cdot\ln\alpha = 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0$. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} [\ln(x + 1) - (x + 1)\cdot\ln x] = 0\cdot(-\infty) = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [x\cdot\ln(x + 1) - (x + 1)\cdot\ln x] = \lim\limits_{x\to+\infty} [x\cdot\ln(x + 1) - x\cdot\ln x - \ln x] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} [x\cdot(\ln(x + 1) - \ln x) - \ln x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln x\right) = 1\cdot(+\infty) = -\infty.$

Άρα $f(A) = R$.
Είναι $0 \in f(A)$ άρα η $f(\alpha) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, +\infty)$ και επειδή η f είναι "1 – 1" ως γνησίως φθίνουσα στο $(0 , +\infty)$ τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2007

ΜΑΪΟΣ 2007

ΘΕΜΑ 1

Α1). Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
Α2). Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;
Α3). Πότε η ευθεία y = l λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;
Β). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α). Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β] και για κάθε x ∈ [α, β] ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot dx > 0$.

β). Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

γ). Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

δ). Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t) \cdot dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

ε). Αν α > 1 τότε $\lim_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$.

ΛΥΣΗ

Α1). Θέμα Θεωρίας.
Α2). Θέμα Θεωρίας.
Α3). Θέμα Θεωρίας.
Β). α). ΛΑΘΟΣ, β). ΛΑΘΟΣ, γ). ΛΑΘΟΣ, δ). ΣΩΣΤΟ, ε). ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2 + i \cdot \alpha}{\alpha + 2 \cdot i}$, με α ∈ R.

α). Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα ρ =1.

β). Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \frac{2 + i \cdot \alpha}{\alpha + 2 \cdot i}$, για α = 0 και α = 2 αντίστοιχα.

i). Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.
ii).Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2 \cdot \nu} = (-z_2)^{\nu}$, για κάθε φυσικό αριθμό ν.

ΛΥΣΗ

α). $|z| = \left|\frac{2 + i \cdot \alpha}{\alpha + 2 \cdot i}\right| = \frac{|2 + i \cdot \alpha|}{|\alpha + 2 \cdot i|} = \frac{\sqrt{2^2 + \alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 2^2}} = 1.$

β). Για α = 0 : $z_1 = \dfrac{2+i\cdot 0}{0+2\cdot i} = \dfrac{2}{2i} = -i$ και για α = 2 : $z_2 = \dfrac{2+i\cdot 2}{2+2\cdot i} = 1$.

i). Η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών είναι $AB = |z_2 - z_1| = |1 + i| = \sqrt{1^1 + 1^2} = \sqrt{2}$.

ii). ισχύει : $(z_1)^{2\cdot\nu} = (-i)^{2\cdot\nu} = (i^2)^\nu = (-1)^\nu = (-z_2)^\nu$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3\cdot x - 2\cdot ημ^2θ$, όπου $θ \in R$ μια σταθερά με $θ \neq κ\cdot π + \dfrac{π}{2}$, $κ \in Z$.

α). Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

β). Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

γ). Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $Α(x_1, f(x_1))$, $Β(x_2, f(x_2))$ και $Γ(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2\cdot x - 2\cdot ημ^2θ$.

δ). Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2\cdot x - 2\cdot ημ^2θ$.

ΛΥΣΗ

α). $f'(x) = 3\cdot x^2 - 3$ και $f''(x) = 6\cdot x$

x	-∞		-1		0		1		+∞
f΄(x)		+	0	-		-	0	+	
f΄΄(x)		-		-	0	+		+	
f (x)		↗	τ.μ.	↘	σ.κ.	↘	τ.ελ.	↗	

β). → $Δ_1 = (-\infty, -1)$. Η f είναι γν. αύξουσα στο $Δ_1$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 3\cdot x - 2\cdot ημ^2θ) = -\infty$.

$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} (x^3 - 3\cdot x - 2\cdot ημ^2θ) = 2 - 2\cdot ημ^2θ = 2\cdot συν^2θ > 0$.

άρα $f(Δ_1) = (-\infty, 2\cdot συν^2θ)$.

$0 \in f(Δ_1)$, άρα η f(x) = 0 έχει ακριβώς μια ρίζα στο $Δ_1$.

→ $Δ_2 = [-1, 1]$. Η f είναι γν. φθίνουσα στο $Δ_2$

$f(-1) = (-1)^3$ α $3(-1) - 2\cdot ημ^2θ = 2\cdot συν^2θ > 0$.

$f(1) = 1^3 - 3 - 2\cdot ημ^2θ) = -2 - 2\cdot ημ^2θ < 0$.

άρα $f(Δ_2) = [-2 - 2\cdot ημ^2θ, 2\cdot συν^2θ]$

$0 \in f(Δ_2)$, άρα η f(x) = 0 έχει ακριβώς μια ρίζα στο $Δ_2$.

→ $Δ_3 = (1, +\infty)$. Η f είναι γν . αύξουσα στο $Δ_3$.

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} (x^3 - 3\cdot x - 2\cdot ημ^2θ) = -2 - 2\cdot ημ^2θ < 0$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3\cdot x - 2\cdot ημ^2θ) = +\infty$. άρα $f(Δ_3) = (-2 - 2\cdot ημ^2θ, +\infty)$.

$0 \in f(Δ_3)$, άρα η f(x) = 0 έχει ακριβώς μια ρίζα στο $Δ_3$.

Επομένως η f(x) = 0 έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο R.

γ). Τα ζητούμενα σημεία είναι : Α $(-1, 2\cdot συν^2θ)$, Β$(1, -2-2\cdot ημ^2θ)$ και Γ$(0, -2\cdot ημ^2θ)$.
Οι συντεταγμένες των Α , Β , Γ ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας (ε) :
$y = -2\cdot x - 2\cdot ημ^2θ$, άρα τα Α , Β , Γ βρίσκονται στην (ε).

δ). Θεωρούμε $g(x) = f(x) - (-2\cdot x - 2\cdot ημ^2θ) = x^3 - x$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
g(x)	–	+	–	+	

$$E = \int_{-1}^{0} g(x)\cdot dx - \int_{0}^{1} g(x)\cdot dx = \int_{-1}^{0}(x^3-x)\cdot dx - \int_{0}^{1}(x^3-x)\cdot dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \cdots = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει f(0) > 0. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει g(x) > 0 για κάθε x ∈ [0, 1]. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$F(x) = |\int_0^x f(t)\cdot g(t)\cdot dt$, $x \in [0, 1]$,

$G(x) = \int_0^x g(t)\cdot dt$, $x \in [0, 1]$.

α). Να δειχθεί ότι F(x) > 0 για κάθε x στο διάστημα (0, 1].
β). Να αποδειχθεί ότι: f(x)·G(x) > F(x), για κάθε x στο διάστημα (0, 1].
γ). Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\dfrac{F(x)}{G(x)} \le \dfrac{F(1)}{G(1)}$, για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

δ). Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\left(\int_0^x f(t)\cdot g(t)\cdot dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2} ημ(t^2)\cdot dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\cdot dt\right)\cdot x^5}$.

ΛΥΣΗ

α). Αφού οι f, g είναι συνεχείς, έχουμε ότι η F είναι παραγωγίσιμη, με : $F'(x) = f(x)\cdot g(x)$, $x \in [0, 1]$
Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 1], έχουμε ότι για $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$.
Επιπλέον για κάθε x ∈ [0, 1] είναι g(x) > 0, εξ’ υποθέσεως.
Επομένως είναι $f(x)\cdot g(x) > 0$, ∀ x ∈ (0, 1 (0,1]. Άρα, είναι : $F'(x) > 0$, x ∈ (0, 1]
οπότε η F είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 1].
Επομένως, για : $x > 0 \Rightarrow F(x) > F(0) \Rightarrow F(x) > 0$, x ∈ (0,1].

β). Έχουμε : $f(x)\cdot G(x) > F(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot\int_0^x g(t)\cdot dt > \int_0^x f(x)\cdot g(t)\cdot dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^x f(x)\cdot g(t)\cdot dt > \int_0^x f(t)\cdot g(t)\cdot dt \Rightarrow \int_0^x \left[f(x)\cdot g(t) - f(t)\cdot g(t)\right]\cdot dt > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left[f(x) - f(t)\right]\cdot g(t)\cdot dt > 0 \Rightarrow \int_0^x (f(x) - f(t))\cdot dt > 0.$$

Η οποία ισχύει διότι : $0 \le t \le x \Rightarrow f(0) \le f(t) \le f(x) \Rightarrow f(t) - f(x) \le 0 \Rightarrow f(x) - f(t) \ge 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(f(x) - f(t)\right) \cdot dt > 0.$$

γ). Για x = 1 η δοθείσα ανισοϊσότητα ισχύει ως ισότητα.

Για x = 1, θεωρούμε τη συνάρτηση h(x) = $\dfrac{F(t)}{G(t)}$ $t \in [x,\ 1]$, με $0 < x < 1$. Η h ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ (του διαφορικού λογισμού), οπότε υπάρχει $\xi \in (x,\ 1)$ τέτοιο ώστε :

$$h'(x) = \frac{h(1) - h(x)}{1 - x}.$$

Αλλά, $h'(t) = \dfrac{F'(t) \cdot G(t) - F(t) \cdot G'(t)}{G^2(t)}$.

Από το ερώτημα β) είναι f(t)·G(t) > F(t) και επειδή g(t) > 0, έχουμε ότι :
f(t)·g(t)·G(t) − F(t)·G(t) > 0. Επομένως είναι :

$h'(t) > 0 \Rightarrow h'(\xi) > 0 \Rightarrow \dfrac{h(1) - h(x)}{1 - x} > 0 \Rightarrow h(1) - h(x) > 0.$

διότι 0 < x < 1. Εισάγωντας στην τελευταία h(1) = $\dfrac{F(1)}{G(1)}$ και h(x) = $\dfrac{F(x)}{G(x)}$, προκύπτει :

$$\frac{F(1)}{G(1)} - \frac{F(x)}{G(x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{F(x)}{G(x)} < \frac{F(1)}{G(1)},\ x \in (0,\ 1).$$

Συνεπώς, είναι : $\dfrac{F(x)}{G(x)} \le \dfrac{F(1)}{G(1)}$, $x \in (0,\ 1]$.

Άλλος τρόπος

Μέσω της μονοτονίας της συνάρτησης h(x) = $\dfrac{F(x)}{G(x)}$, $x \in [0,\ 1]$.

δ). (Μια διαφορετική προσέγγιση, στην έννοια ότι : όλες οι λύσεις που έχω μέχρι τώρα συναντήσει χρησιμοποιούν τον κανόνα De L' Hospital)
Είναι, λογω του ερωτήματος γ) :

$$\left|\frac{\left(\int_0^x f(t) \cdot g(t) \cdot dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2) \cdot dx\right)}{\left(\int_0^x g(t) \cdot dt\right) \cdot x^5}\right| = \left|\frac{F(x) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2) \cdot dx\right)}{G(x) \cdot x^5}\right| = \left|\frac{F(x)}{G(x)}\right| \cdot \left|\frac{\left(\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2) \cdot dx\right)}{x^5}\right| =$$

$$= \frac{F(x)}{G(x)} \cdot \left|\frac{\left(\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2) \cdot dx\right)}{x^5}\right| \le \frac{F(1)}{G(1)} \cdot \left|\frac{\left(\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2) \cdot dx\right)}{x^5}\right| = \frac{F(1)}{G(1)} \cdot \frac{\left|\left(\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2) \cdot dx\right)\right|}{\left|x^5\right|} \le$$

$$\le \frac{F(1)}{G(1)} \cdot \frac{\left|\left(\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2) \cdot dx\right)\right|}{x^5} \le \frac{F(1)}{G(1)} \cdot \frac{\int_0^{x^2} \left|\eta\mu(t^2)\right| \cdot dx}{x^5} \le \frac{F(1)}{G(1)} \cdot \frac{\int_0^{x^2} t^2 \cdot dx}{x^5} =$$

$$=\frac{F\;\;1}{G\;\;1}\cdot\frac{\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{x^2}}{x^5}=\frac{F\;\;1}{G\;\;1}\cdot\frac{x^6}{3x^5}=\frac{F\;\;1}{3G\;\;1}\cdot x\,.$$

και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F\;\;1}{3G\;\;1}\cdot x=0$, από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε ότι :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x f\;\;t\;\;\cdot g\;\;t\;\;\cdot dt\right)\left(\int_0^{x^2}\eta\mu\;\;t^2\;\;\cdot dx\right)}{\left(\int_0^x g\;\;t\;\;\cdot dt\right)\cdot x^5}=0.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 1

Α1). Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Α2). Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

Β). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α). Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β). Αν f, g, g′ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α, β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)\cdot dx = \int_\alpha^\beta f(x)\cdot dx \cdot \int_\alpha^\beta g'(x)\cdot dx .$$

γ). Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_\alpha^\beta f(t)\cdot dt\right)' = f(x). \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

δ). Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β) όπου $A = \lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x\to\alpha^-} f(x)$.

ε). Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

ΛΥΣΗ

Α1). Θέμα Θεωρίας.

Α2). Θέμα Θεωρίας.

Β). α). Λάθος, β). Λάθος, γ). Σωστό, δ). Σωστό, ε). Λάθος.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu\, 3x}{x} & , \quad x<0 \\ x^2+\alpha x+\beta\cdot\sigma\upsilon\nu x, & x\ge 0 \end{cases}$

α). Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$.

β). Αν $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδειχθεί ότι α = β = 3.

γ). Αν α = β = 3, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi f(x)\cdot dx$.

ΛΥΣΗ

α). $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu 3x}{x} = 3\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu 3x}{3x} \overset{u=3x}{=} 3\cdot\lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu u}{u} = 3.$

β). Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3\\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+\alpha x+\beta\sigma\upsilon\nu x) = \beta\end{aligned}\right\},\text{ άρα } \beta = 3.$$

Για x > 0 είναι $f'(x) = 2\cdot x + \alpha - \beta\cdot\eta\mu x$.

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \Rightarrow 2\cdot\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\cdot\eta\mu\frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \alpha = \beta$. Επομένως α = β = 3.

γ). $\int_0^{\pi} f(x)\cdot dx = \int_0^{\pi}(x^2+3x+3\cdot\sigma\upsilon\nu x)\cdot dx = \left[x^2+3x+3\cdot\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}+\frac{3\pi^2}{2}$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e\cdot\ln x$, x > 0.
α). Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (1, +∞).
β). Να αποδειχθεί ότι ισχύει f(x) ≥ e, για κάθε x > 0.
γ). Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)\cdot dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)\cdot dt + \int_2^4 f(t)\cdot dt$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (0, +∞).

ΛΥΣΗ

α). $f'(x) = (e^x - e\cdot\ln x)' = e^x - \frac{e}{x}$, x > 0.

$f''(x) = \left(e^x - \frac{e}{x}\right)' = e^x + \frac{e}{x^2} > 0$, x > 0, άρα η f′ είναι γν. αύξουσα στο (0 , +∞).

Για x > 1 ⇒ f′(x) > f′(1) ⇒ f′(x) > 0, άρα η f είναι γν. αύξουσα στο (1 , +∞). [f′ γν.αύξουσα]

β). Για 0 < x < 1 ⇒ f′(x) < f′(1) ⇒ f′(x) < 0, άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο (0, 1).

x	0	1	+∞
f(x)	↘		↗

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το f(1) = e, άρα f (x) ≥ f (1) ⇒ f (x) ≥ e, για κάθε x > 0.

γ). $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(x)\cdot dx = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(x)\cdot dx + \int_2^4 f(x)\cdot dx \Rightarrow \int_{x^2+1}^{x^2+2} f(x)\cdot dx - \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(x)\cdot dx - \int_2^4 f(x)\cdot dx = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{x^2+1}^{x^2+2} f(x)\cdot dx + \int_{x^2+2}^{x^2+3} f(x)\cdot dx - \int_2^4 f(x)\cdot dx = 0 \Rightarrow \int_{x^2+1}^{x^2+3} f(x)\cdot dx - \int_2^4 f(x)\cdot dx = 0$.

Προφανής λύση η x = 1 (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+3} f(x)\cdot dx - \int_2^4 f(x)\cdot dx$, x > 0.

Είναι

$g'(x) = \left(\int_{x^2+1}^{x^2+3} f(x)\cdot dx - \int_{2}^{4} f(x)\cdot dx \right)' = 2\cdot x\cdot f(x^2+3) - 2\cdot x\cdot f(x^2+1) = 2\cdot x\cdot[f(x^2+3) - f(x^2+1)] > 0$

διότι $\to$ $x > 0$ και

$\to$ $1 \le 1 + x^2 < 3 + x^2 \Rightarrow f(1+x^2) < f(3+x^2) \Rightarrow f(x^2+3) - f(x^2+1) > 0$.

Άρα η g είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια το πολύ ρίζα (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι η $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x = 1$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta\cdot i$ και $z_2 = \dfrac{2-\overline{z_1}}{2+\overline{z_1}}$, όπου $\alpha, \beta \in R$ με $\beta \neq 0$.

Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in R$.

α). Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.

β). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

γ). Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\cdot\beta > 0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι

$(z_1 + 1 + i)^{20} - (\overline{z_1} + 1 - i)^{20} = 0$.

ΛΥΣΗ

α). Είναι $z = \alpha + \beta\cdot i$ και $z_2 - z_1 = \gamma \in R \Rightarrow z_2 = \gamma + \alpha + \beta\cdot i$.

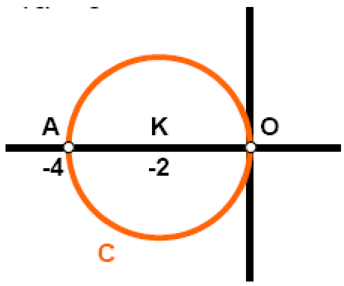
$z_2 = \dfrac{2-\overline{z_1}}{2+\overline{z_1}} \Rightarrow \alpha + \gamma + \beta\cdot i = \dfrac{2-\alpha+\beta\cdot i}{2+\alpha-\beta\cdot i} \Rightarrow (\alpha + \gamma + \beta\cdot i)\cdot(2 + \alpha - \beta\cdot i) = 2 - \alpha + \beta\cdot i \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot\alpha + \alpha^2 - \alpha\cdot\beta\cdot i + 2\cdot\gamma + \alpha\cdot\gamma - \beta\cdot\gamma\cdot i + 2\cdot\beta\cdot i + \alpha\cdot\beta\cdot i + \beta^2 - 2 + \alpha - \beta\cdot i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha^2 + 3\cdot\alpha + \beta^2 + 2\cdot\gamma + \alpha\cdot\gamma - 2) + (\beta - \beta\cdot\gamma)\cdot i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\alpha^2 + 3\cdot\alpha + \beta^2 + 2\cdot\gamma + \alpha\cdot\gamma - 2 = 0$ (1) και $\beta - \beta\cdot\gamma = 0 \Rightarrow \beta\cdot\gamma = \beta \Rightarrow \gamma = 1\}$.

Άρα $z_2 - z_1 = 1$.



β). (1) $\Rightarrow \alpha^2 + 3\cdot\alpha + \beta^2 + 2 + \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 4\cdot\alpha = 0$.

(C) : $x^2 + y^2 + 4\cdot x = 0$.

$A^2 + B^2 - 4\cdot\Gamma = 16 > 0$, άρα ο C είναι κύκλος με κέντρο K $(-2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

Είναι $z_1 = \alpha + \beta\cdot i$ και $\alpha^2 + \beta^2 + 4\cdot\alpha = 0$, άρα η εικόνα του z_1 κινείται στον κύκλο C.

Τα σημεία $A(-4, 0)$ και $O(0, 0)$ εξαιρούνται διότι $\beta \neq 0$..

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι ο κύκλος C χωρίς τα σημεία A και O.

γ). $z_1^2 = (\alpha + \beta\cdot i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot i$

$z_1^2 \in I \Rightarrow Re(z_1^2) = 0 \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$ και επειδή $\alpha\cdot\beta > 0$, θα είναι $\alpha = \beta$ (2)

Είναι $\alpha^2 + \beta^2 + 4\cdot\alpha = 0 \Rightarrow 2\cdot\alpha^2 + 4\cdot\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha\cdot(\alpha + 2) = 0$ και επειδή $\alpha\cdot\beta > 0$, θα είναι $\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -2$. Από (2) έχουμε $\alpha = \beta = -2$, άρα $z_1 = -2 - 2\cdot i$.

$(z_1 + 1 + i)^{20} = (-2 - 2\cdot i + 1 + i)^{20} = (-1 - i)^{20} = (1 + i)^{20} = [(1 + i)^2]^{10} = (2\cdot i)^{10}$.

$(\overline{z}_1 + 1 - i)^{20} = (-2 + 2\cdot i + 1 - i)^{20} = (-1 + i)^{20} = (1 - i)^{20} = [(1 - i)^2]^{10} = (-2\cdot i)^{10} = (2\cdot i)^{10}$.

Άρα $(z_1 + 1 + i)^{20} - (\overline{z}_1 + 1 - i)^{20} = (2\cdot i)^{10} - (2\cdot i)^{10} = 0$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2008

ΜΑΪΟΣ 2008

ΘΕΜΑ 1

Α1). Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει:

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}.$$

Α2). Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] ;

Β). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α). Αν μια συνάρτηση $f : A \to R$ είναι 1 – 1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.

β). Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

γ). Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha\cdot z^2 + \beta\cdot z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο C των μιγαδικών.

δ). Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει : $f''(x) > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ε). Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α, β, γ ∈ Δ τότε ισχύει :

ΛΥΣΗ

Α1). i). Αν $x > 0$: $f(x) = \ln|x| \Rightarrow f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$

Αν $x < 0$: $f(x) = \ln|x| \Rightarrow f(x) = \ln(-x) \Rightarrow$

Θέτουμε όπου $-x = u$ και έχουμε: $f(u) = \ln u \Rightarrow f'(u) = [\ln u]' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$.

Άρα : $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$.

Α2). Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^+} f(x) = f(\beta)$.

Β). α). ΣΩΣΤΟ, β). ΣΩΣΤΟ, γ). ΛΑΘΟΣ, δ). ΛΑΘΟΣ, ε). ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν :

$|(i + 2\cdot\sqrt{2})\cdot z| = 6$ και $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3\cdot i)|$, τότε να βρείτε:

α). το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

β). το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

γ). την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

δ). την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

ΛΥΣΗ

α). $|i + 2\cdot\sqrt{2}\cdot z| = 6 \Leftrightarrow |i + 2\cdot\sqrt{2}|\cdot|z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{8+1}\cdot z = 6 \Leftrightarrow 3\cdot|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$,

επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Α των μιγαδικών z είναι κύκλος C με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα ρ = 2.

β). $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3\cdot i)|$. Αν $w = x + y\cdot i$, $x \in R$, $y \in R$ τότε :

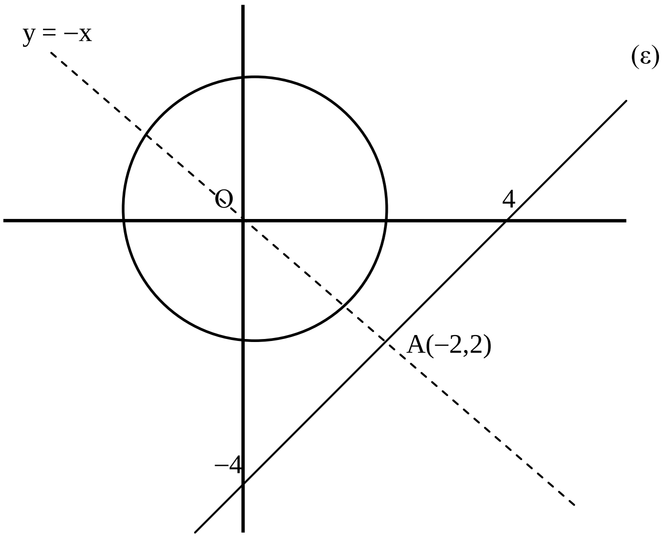
$|(x + y\cdot i) - (1 - i)| = |(x + y\cdot i) - (3 - 3\cdot i)| \Leftrightarrow |(x - 1) + (y + 1)\cdot i| = |(x - 3) + (y + 3)\cdot i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2\cdot x + 1 + y^2 + 2\cdot y + 1 = x^2 - 6\cdot x + 9 + y^2 + 6\cdot y + 9 \Leftrightarrow 4\cdot x - 4\cdot y - 16 = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 4 = 0$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι ευθεία (ε) με εξίσωση $x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = x - 4$.



γ). 1[ος] τρόπος

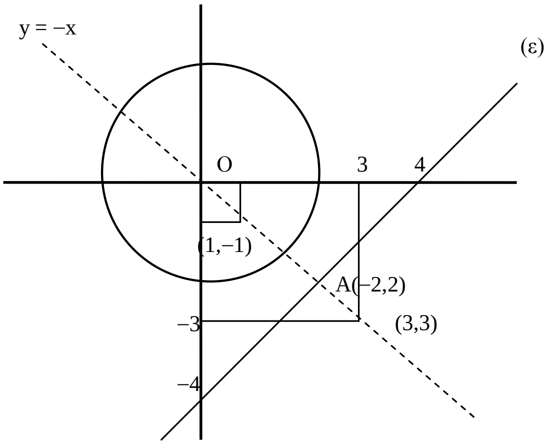
Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού w είναι η μεσοκάθετος ευθεία στα άκρα του τμήματος που ορίζεται από τα σημεία Κ(1, – 1) και Λ(3, – 3).

Με διεύθυνση : $\lambda_{K\Lambda} = \dfrac{-3+1}{3-1} = -\dfrac{2}{2} = -1$.

Και τύπο : y = – x. και είναι κάθετη με την ευθεία του γ.τ του w, y = x – 4

Οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο Α

$A : \begin{Bmatrix} y = x - 4 \\ y = x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 2 \\ y = -2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow A(2,-2)$.



Επομένως η ελάχιστη απόσταση των εικόνων

Του μιγαδικού w από την αρχή των αξόνων είναι $\min|w| = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\cdot\sqrt{2}$.

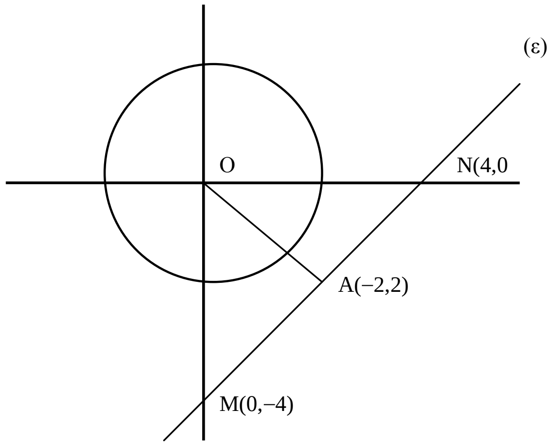
2[ος] τρόπος

Το $|w|$ είναι η απόσταση της εικόνας Μ του w από το Ο(0, 0). Οπότε,

$\min|w| = d(O,(\varepsilon)) = \dfrac{|0-0-4|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\cdot\sqrt{2}$, αφού για κάθε σημείο $N \in (\varepsilon)$ με $N \neq M$ ισχύει (ΟΝ) > (ΟΜ).

3[ος] τρόπος

Η ευθεία y = x – 4, τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο M(4, 0) και τον άξονα y′y στο σημείο N(0, – 4). Ορίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο από τα σημεία τομής και την αρχή O, με ίσες πλευρές OM = ON = 4. Η υποτείνουσα αυτού του τριγώνου είναι MN = $4\cdot\sqrt{2}$ (πυθαγόρειο)
το ύψος του OA ορίζει επίσης δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα τα OAM, και OAN και είναι OA = $\frac{1}{2}\cdot$MN = $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}$ = min$|$w$|$.



δ). Το $|$z – w$|$ είναι η απόσταση των εικόνων A, M των μιγαδικών z και w αντιστοίχως.
Είναι d(O, (ε)) > ρ = 2 (όπου ρ η ακτίνα του κύκλου του ερωτήματος α) άρα η (ε) δεν τέμνει τον κύκλο C , επομένως: min$|$z – w$|$ = d(O, (ε)) – ρ = $2\cdot\sqrt{2}$ – 2, αφού (BM) ≤ (AM) για κάθε A ε C και B το σημείο τομής της OM με τον C.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\begin{Bmatrix} x\cdot\ln x, & x>0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{Bmatrix}$.

α). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.
β). Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
γ). Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης x = $e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.
δ). Να αποδείξετε ότι ισχύει : f ′(x + 1) > f(x + 1) – f(x), για κάθε x > 0.

ΛΥΣΗ

α). Για x > 0 οι συναρτήσεις lnx , $\frac{1}{x}$ είναι συνεχείς

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x) \overset{0\cdot -\infty}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 .$$

Ισχύει f(0) = 0, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, επομένως η f είναι συνεχής στο x_0 = 0.

β). Για x > 0 η f είναι παραγωγίσιμη με f ′(x) = (x·lnx)′ = (x)′·lnx + x·(lnx)′ = lnx + x·$\frac{1}{x}$ = lnx + 1.

Θέτουμε : f ′(x) = 0 ⇔ lnx + 1 = 0 ⇔ lnx = –1 ⇔ lnx = lne ⇔ x = e^{-1} = $\frac{1}{e}$ ∈ (0, +∞).

Λύνουμε την ανίσωση : f ′(x) > 0 ⇔ lnx + 1 > 0 lnx > –1 ⇔ lnx > $\ln e^{-1}$ ⇔ x > e^{-1} ⇔ x > $\frac{1}{e}$.

καθώς και την ανίσωση: : $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0$ $\ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-1} \Leftrightarrow x < e^{-1} \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$.

Η f είναι συνεχής στο [0, +∞), επομένως (λόγω της προηγούμενης διερεύνησης) έχουμε:

x	0	1/e	+∞
f ′(x)	–		+
f(x)	↘		↗
	0	−1/e Ο.Ε	+∞

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \frac{1}{e}$

με ελάχιστη τιμή $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$

→ Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

→ Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{e}\right]$.

→ Παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{e}$ το $f\left(\frac{1}{e}\right) \overset{\frac{1}{e}>0}{=} \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

Ακόμα γνωρίζουμε ότι : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ και υπολογίζουμε :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x \cdot \ln x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Επομένως σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι $f(A) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

<u>1ος τρόπος</u>

γ). Είναι : $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = \ln\left(e^{\frac{\alpha}{x}}\right) \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \cdot \ln e \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x}$ ⇔ x·lnx = α.

Θεωρώ την συνάρτηση h(x) = x·lnx = α, με x > 0.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής ως πράξη συνεχών και παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων

Με h′(x) = (x·lnx – α)′ = lnx + 1 = f ′(x). Οπότε για την h έχουμε :

x	0	1/e	+∞
h ′(x)	+		–
h(x)	↘		↗
	−α	−α−1/e Ο.Ε	+∞

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \frac{1}{e}$

με ελάχιστη τιμή

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) - \alpha = -\frac{1}{e} - \alpha$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} (x \cdot \ln x - \alpha) = 0 - \alpha = -\alpha$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (x \cdot \ln x - \alpha) = +\infty - \alpha = +\infty$$

(i). Αν το $\boxed{\alpha = 0}$, τότε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$ και $h(A_1) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right)$.

Η εξίσωση δεν έχει ρίζα διότι δεν ανήκει το 0 στο σύνολο τιμών.

Για $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ $h(A_2) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών άρα

Η εξίσωση έχει λύση και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα η λύση είναι μοναδική.

Και μάλιστα θετική διότι x ∈ $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

(ii). Για α = – 1 το σύνολο τιμών h(A) = [0, +∞) τότε έχει μοναδική ρίζα την x = $\frac{1}{e}$.

(iii). $-\alpha-\frac{1}{e}>0$, δηλαδή $\alpha<-\frac{1}{e}$ το σύνολο τιμών h(A) = $\left[-\alpha-\frac{1}{e},+\infty\right)$ έχει θετικές τιμές

Άρα το 0 ∉ h(A), δηλαδή η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

(iv). Για $-\alpha-\frac{1}{e}<0$, δηλαδή $\alpha>-\frac{1}{e}$, έχουμε δύο περιπτώσεις:

[Α περίπτωση]:

Αν $\alpha>-\frac{1}{e}$, αλλά α < 0, δηλαδή $-\frac{1}{e}<\alpha<0$.

Τότε x ∈ $\left(0,\frac{1}{e}\right]$, το σύνολο τιμών της h είναι : $h(A_1)=\left[-\alpha-\frac{1}{e},-\alpha\right)$, το $0\in h(A_1)$, άρα

Η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα και επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα η λύση είναι μοναδική και μάλιστα θετική.

για x ∈ $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, το σύνολο τιμών $h(A_2)=\left[-\alpha-\frac{1}{e},+\infty\right)$, οπότε $0\in h(A_2)$ άρα

Η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα η λύση σ' αυτό το διάστημα είναι μοναδική και μάλιστα θετική.

Άρα έχω δύο ρίζες (θετικές).

[Β περίπτωση]:

Αν $\alpha>-\frac{1}{e}$, αλλά α > 0.

Τότε για x ∈ $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ το σύνολο τιμών της h είναι : $h(A_1)=\left[-\alpha-\frac{1}{e},-\alpha\right)$, το $0\notin h(A_1)$

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση. Αλλά

Για x ∈ $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ το σύνολο τιμών της h είναι : $h(A_1)=\left[-\alpha-\frac{1}{e},+\infty\right)$, το $0\in h(A_2)$

Άρα η εξίσωση έχει λύση και είναι θετική αφού h γνησίως αύξουσα και x ∈ $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

<u>2ος τρόπος</u>

γ). Είναι : $x=e^{\frac{\alpha}{x}}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x=\ln\left(e^{\frac{\alpha}{x}}\right)\Leftrightarrow\ln x=\frac{\alpha}{x}\cdot\ln e\Leftrightarrow\ln x=\frac{\alpha}{x}$ ⇔ x·lnx = α ⇔ f(x) = α.

(για (x ∈ (0, +∞)). Άρα η x = $e^{\frac{\alpha}{x}}$ είναι ισοδύναμη με την f (x) = α, x ∈ (0, +∞).

Έστω $A=A_1\cup A_2$ όπου $A_1=\left(0,\frac{1}{e}\right)$ και $A_2=\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, οπότε από (β) ερώτημα είναι

$f(A_1)=\left(-\frac{1}{e},0\right)$ και $f(A_2)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$. Συνεπώς:

→ Αν $\alpha<-\frac{1}{e}$, τότε $\alpha\notin f(A_1)$ και $\alpha\notin f(A_2)$, άρα η εξίσωση f (x) = α δεν έχει ρίζες στο (0, +∞)

→ Αν $α = -\frac{1}{e}$, τότε $α \notin f(A_1)$ και $α \in f(A_2)$, που επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 η εξίσωση f(x) = α θα έχει μοναδική ρίζα (το $x_0 = \frac{1}{e}$).

→ Αν $α \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$, τότε $α \in f(A_1)$ και $α \in f(A_2)$, άρα η εξίσωση f(x) = α έχει δύο ρίζες μία στο A_1 και μία στο A_2 αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 και γνησίως αύξουσα στο A_2.

→ Αν α = 0, τότε $α \notin f(A_1)$ και $α \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση f (x) = α έχει μοναδική ρίζα το $x_0 = 1$ αφού $f(1) = 1\cdot\ln 1 = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2.

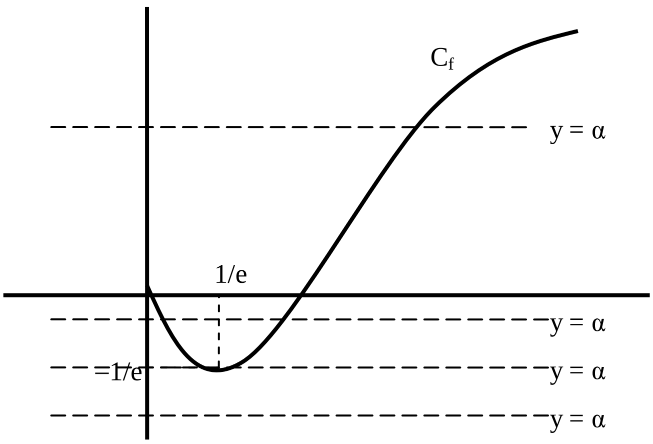
→ Αν α > 0, τότε $α \notin f(A_1)$ και $α \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση f(x) = α έχει μοναδική λύση αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2.

<u>3ος τρόπος</u>

γ). Είναι : $x = e^{\frac{α}{x}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = \ln\left(e^{\frac{α}{x}}\right) \Leftrightarrow \ln x = \frac{α}{x}\cdot\ln e \Leftrightarrow \ln x = \frac{α}{x} \Leftrightarrow x\cdot\ln x = α \Leftrightarrow f(x) = α.$

οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται γραφικά από τα σημεία τομής της συνάρτησης $f(x) = x\cdot\ln x$ και την γραφική παράσταση της ευθείας y = α.

μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης και της σχετικές θέσεις που μπορεί να έχει η οριζόντια ευθεία y = α, φαίνεται στο διπλανό σχήμα



→ Αν $α < -\frac{1}{e}$. Η εξίσωση f(x) = α.
Δεν έχει καμία ρίζα.

→ Αν $α = -\frac{1}{e}$. Η εξίσωση f(x) = α.
Δεν έχει μία ρίζα

→ Αν $-\frac{1}{e} < α \le 0$. Η εξίσωση f(x) = α.
Η εξίσωση έχει δύο ρίζες.

→ Αν α > 0. Η εξίσωση f(x) = α, έχει μία ρίζες.

<u>1ος τρόπος</u>

δ). Για x > 0 είναι $f'(x) = \ln x + 1$, άρα $f''(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

→ Η f είναι συνεχής στο [x, x +1], x > 0 ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων x και lnx

→ Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x, x + 1) διότι lnx παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.
Με $f'(x) = \ln x + 1$

Άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. (διαφ. Λογισμού) υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (x, x + 1)$ (x > 0) τέτοιο ώστε : $f'(ξ) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = \frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f(x + 1) - f(x)$ (1)

Όμως ξ < x + 1 και f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα
$f'(ξ) < f'(x + 1) \Leftrightarrow f(x + 1) - f(x) < f'(x + 1)$, άρα ισχύει η ανίσωση.

<u>2ος τρόπος</u>

Έχουμε : $f(x) = x\cdot\ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + 1$

Θέλουμε να δείξουμε ότι : $f'(x + 1) > f(x + 1) - f(x)$

Οπότε : $\ln(x + 1) + 1 > (x + 1)\cdot\ln(x + 1) - x\cdot\ln x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(x + 1) + 1 > x\cdot\ln(x + 1) + \ln(x + 1) - x\cdot\ln x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 > x\cdot\ln(x + 1) - x\cdot\ln x \Leftrightarrow \ln(x + 1) - \ln x < \frac{1}{x}, \quad x > 0$

Θεωρώ $g(t) = \ln t$ / $[x, x + 1]$ εφαρμόζω Θ.Μ.Τ.

→ Η g στο $[x, x + 1]$ συνεχής ως βασική λογαριθμική συνάρτηση

→ Η g στο $(x, x + 1)$ παραγωγίσιμη ως βασική συνάρτηση

Με $f'(t) = \frac{1}{t}$, $t > 0$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, x + 1)$

ώστε να ισχύει : $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{1} = \ln(x+1) - \ln x$

άρα $\xi \in (x, x + 1) \Rightarrow x < \xi < x + 1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \Rightarrow \ln(x + 1) - \ln x < \frac{1}{x}$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο R για την οποία ισχύει $f(x) = (10\cdot x^3 + 3\cdot x)\cdot\int_0^2 f(t)\cdot dt - 45$

α). Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20\cdot x^3 + 6\cdot x - 45$.

β). Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι :

$g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$.

γ). Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2\cdot g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$, και $g(0) = g'(0) = 1$, τότε

i). να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

ii). να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1 – 1.

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος

α). Έστω $\alpha = \int_0^2 f(t)\cdot dt$, $\alpha \in R$, τότε έχουμε: $f(x) = \alpha\cdot(10\cdot x^3 + 3\cdot x) - 45$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 2] \subseteq R$, άρα

$$\int_0^2 f(x)\cdot dx = \int_0^2\left[\alpha\cdot(10\cdot x^3 + 3\cdot x) - 45\right]\cdot dx \Leftrightarrow \alpha = \alpha\cdot\int_0^2(10\cdot x^3 + 3\cdot x)\cdot dx - 45\cdot\int_0^2 dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \alpha\cdot\left[\frac{5\cdot x^4}{2} + \frac{3\cdot x^2}{2}\right]_0^2 - 45\cdot[x]_0^2 \Leftrightarrow \alpha = 46\cdot\alpha - 90 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

Άρα η συνάρτηση f έχει τύπο : $f(x) = 20\cdot x^3 + 6\cdot x - 45$, $x \in R$.

2ος τρόπος

$$f(x) = (10\cdot x^3 + 3\cdot x)\cdot\int_0^2 f(x)\cdot dx - 45 \Rightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)\cdot dx = \int_0^2\left[(10\cdot x^3 + 3\cdot x)\cdot\int_0^2 f(x)\cdot dx - 45\right]\cdot dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)\cdot dx = \int_0^2 f(x)\cdot dx\cdot\int_0^2 \left(10\cdot x^3+3\cdot x\right)\cdot dx-45\cdot\int_0^2 dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\cdot dx = \int_0^2 f(x)\cdot dx\cdot\left[\frac{5\cdot x^4}{2}+\frac{3\cdot x^2}{2}\right]_0^2-45\cdot\left[x\right]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\cdot dx = 46\cdot\int_0^2 f(x)\cdot dx-90 \Leftrightarrow 46\cdot\int_0^2 f(x)\cdot dx-\int_0^2 f(x)\cdot dx=90$$

$$\Leftrightarrow 45\cdot\int_0^2 f(x)\cdot dx = 90 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\cdot dx = 2.$$

Άρα η συνάρτηση f έχει τύπο : $f(x) = 20\cdot x^3 + 6\cdot x - 45,\ x \in R$.

<u>$1^{ος}$ τρόπος</u>

β). Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R άρα η g είναι g′ συνεχείς στο R. Για $x \neq x_0$, έχουμε:

$$g''(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)-g'(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x-x_0\to 0}\frac{g'(x)-g'(x_0)}{x-x_0}.$$

Θέτω $x - x_0 = h$, οπότε : $g''(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$.

Άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει $g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>

β). Η g δύο φορές παραγωγίσιμη άρα g, g′ συνεχείς , για κάθε $h \neq 0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x_0-h)-g'(x)}{-h} =$$

Θέτουμε $u = -h$, άρα $x - h = x + u$, και έχουμε:

$$= \lim_{-h\to 0}\frac{g'(x-h)-g'(x)}{-h} = \lim_{u\to 0}\frac{g'(x_0+u)-g'(x)}{u} = g''(x).$$

<u>$3^{ος}$ τρόπος</u>

β). Η g′ είναι παραγωγίσιμη στο R (αφού η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R). Άρα για $h \neq 0$

Για $x \in R$ έχουμε: $g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x_0+h)-g'(x_0)}{h} \overset{\substack{\theta\varepsilon\tau o\upsilon\mu\varepsilon \\ u=-h}}{=} \lim_{u\to 0}\frac{g'(x_0-h)-g'(x_0)}{-u} =$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{-\left[g'(x_0)-g'(x_0-u)\right]}{-u} = \lim_{u\to 0}\frac{g'(x_0)-g'(x_0-u)}{u},\ x_0 \in R.$$

Επομένως για κάθε $x \in R$ ισχύει $g''(x) = \lim_{u\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$

<u>$1^{ος}$ τρόπος</u>

γ). $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2\cdot g(x)+g(x-h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h^2}+\frac{g(x-h)-g(x)}{h^2}\right] =$

$$\underset{D.L'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h)-0}{2\cdot h}+\frac{-g'(x-h)-0}{2\cdot h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h)}{2\cdot h}+\frac{-g'(x-h)}{2\cdot h}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h)-g'(x)}{2\cdot h}+\frac{g'(x)-g'(x-h)}{2\cdot h}\right]=$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[g''(x)+g''(x)\right]=\frac{1}{2}\cdot g''(x) = g''(x)$$

Άρα από υπόθεση : $g''(x) = f(x) + 45 \Leftrightarrow g''(x) = 20\cdot x^3 + 6\cdot x = [5\cdot x^4 + 3\cdot x^2]'$,
Επομένως, επειδή η g' είναι συνεχής στο R θα έχουμε:
$g'(x) = 5\cdot x^4 + 3\cdot x^2 + c_1$, $c_1 \in R$.
Είναι : $g'(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$, άρα $g'(x) = 5\cdot x^4 + 3\cdot x^2 + 1 \Leftrightarrow g'(x) = (x^5 + x^3 + x)'$
Η g συνεχής στο R
$g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$, $c \in R$. Όμως $g(0) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1$, επομένως :
$g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$, $x \in R$.

ii).Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με : $g'(x) = 5\cdot x^4 + 3\cdot x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in R$, αφού $5\cdot x^4 \geq 0$, $3\cdot x^2 \geq 0$, επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο R. Οπότε θα είναι και ''1 – 1'' σε αυτό.

$2^{ος}$ τρόπος

γ). i). Είναι : $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} = f(x)+45$

Έχουμε: $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L'H}{=}} \begin{pmatrix} παραγωγισιμη \\ ως\ προς\ h \end{pmatrix} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)\cdot(x+h)'-0+g'(x-h)\cdot(x-h)'}{(h^2)'} = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2\cdot h} =$$

$$= = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)+g'(x)-g'(x-h)}{2\cdot h} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[g''(x)+g''(x)\right] = g''(x)$$

Άρα: $g''(x) = f(x) + 45 \Leftrightarrow g''(x) = 20\cdot x^3 + 6\cdot x - 45 + 45 \Leftrightarrow g''(x) = 20\cdot x^3 + 6\cdot x$
Επομένως, επειδή η g' είναι συνεχής στο R θα έχουμε:
$g'(x) = 20\cdot\frac{x^4}{4}+6\cdot\frac{x^2}{2}+c \Rightarrow g'(x) = 5\cdot x^4 + 3\cdot x^2 + c$, $c \in R$.
Για $x = 0$: $g'(0) = 1 \Leftrightarrow 5\cdot 0 + 3\cdot 0 + c = 1 \Leftrightarrow c = 1$,
Άρα $g'(x) = 5\cdot x^4 + 3\cdot x^2 + 1 \Leftrightarrow g(x) = 5\cdot\frac{x^5}{5}+3\cdot\frac{x^3}{3}+x+c_1 \Rightarrow g(x) = x^5 + x^3 + x + c_1$, $c_1 \in R$
Η g συνεχής στο R
$g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$, $c \in R$. Όμως $g(0) = 1 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 + c_1 = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$,
Επομένως : $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$, $x \in R$.

ii).Η $g(x) = = x^5 + x^3 + x + 1$, $x \in R$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική, παραγωγίσιμη στο R με : $g'(x) = 5\cdot x^4 + 3\cdot x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in R$, αφού $5\cdot x^4 \geq 0$, $3\cdot x^2 \geq 0$, επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο R. Οπότε θα είναι και «1 – 1» στο R.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 1

Α). Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot dx$ = G(β) – G(α).

Β). Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού ;

Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α). Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1 – 1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

β). Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

γ). Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x′x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x′x.

δ). Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε : α + β·i = 0 $\Leftrightarrow$ α = 0 ή β = 0.

ε). Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ και L ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία : $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} [f(x) - L] = 0$.

ΛΥΣΗ

Α). Θέμα Θεωρίας.

Β). Θέμα Θεωρίας.

Γ). α). Σωστό, β). Λάθος, γ). Σωστό, δ). Λάθος, ε). Σωστό.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \dfrac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta\cdot z + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α). Να αποδείξετε ότι β = –1 και γ = 1.

β). Να αποδείξετε ότι $z^3 = -1$.

γ). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει : $w = |z_1 - \bar{z}_1|$.

ΛΥΣΗ

α). 1ος τρόπος

Αν $z_1 = \dfrac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}$, είναι η μια ρίζα, τότε η άλλη ρίζα είναι η $z_2 = \dfrac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2}$. (Τύποι Vieta)

$S = z_1 + z_2 = \dfrac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2} = 1$ και $S = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{\beta}{1} = -\beta$, άρα : – β = 1 $\Rightarrow$ β = – 1.

$P = z_1\cdot z_2 \ \dfrac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+3}{4} = 1$ και $P = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\gamma}{1}$, άρα γ = 1.

2ος τρόπος

Αν $z_1 = \dfrac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}$, είναι η ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta\cdot z + \gamma = 0$, τότε $\left(\dfrac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \beta\cdot\dfrac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2} + \gamma = 0$

$$\Rightarrow \frac{1+2\sqrt{3}\cdot i + i^2\cdot\sqrt{3}^2}{2} + \beta\cdot\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2} + \gamma = 0 \Rightarrow \frac{1+2\sqrt{3}\cdot i - 3}{2} + \beta\cdot\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2} + \gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1+\sqrt{3}\cdot i + \beta + \beta\cdot\sqrt{3}\cdot i + 2\gamma = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\beta+2\gamma-1=0\\ \sqrt{3}+\beta\cdot\sqrt{3}=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\beta+2\gamma-1=0\\ \beta=-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\gamma=1\\ \beta=-1\end{matrix}\right\}.$$

β). Το z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 - z + 1 = 0$, άρα $z_1^2 - z_1 + 1 = 0$

1ος τρόπος

$(z_1 + 1)\cdot(z_1^2 - z_1 + 1) = 0 \Rightarrow z_1^3 + 1 = 0 \Rightarrow z_1^3 = -1$.

2ος τρόπος

$z_1^2 - z_1 + 1 = 0 \Rightarrow z_1^2 = z_1 - 1 \qquad (1)$

$(1) \Rightarrow z_1^3 = z_1^2 - z_1 \Rightarrow z_1^3 = z_1 - 1 - z_1 \Rightarrow z_1^3 = -1$.

3ος τρόπος

$z_1^2 - z_1 + 1 = 0 \Rightarrow \{\, z_1\cdot(z_1 - 1) = -1,\ z_2^2 = z_1 - 1 \,\} \Rightarrow z_1\cdot z_1^2 = -1 \Rightarrow z_1^3 = -1$.

4ος τρόπος

$$z_1^3 = \left(\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{(1+i\cdot\sqrt{3})^3}{8} = \frac{1+3\sqrt{3}\cdot i + 3\cdot(i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3}{8} = \frac{1+3\sqrt{3}\cdot i - 9 - 3\sqrt{3}\cdot i}{8} = -1$$

γ). $|w| = |z_1 - \overline{z_1}| \Rightarrow |w| = |2\cdot \mathrm{Im}(z_1)\cdot i| \Rightarrow |w| = \left|2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right|$.

$|w| = \sqrt{3}$, άρα ο γ.τ. των εικόνων του 2 είναι ο κύκλος με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα $\rho = \sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\cdot\ln x$, $x > 0$.

α). Να αποδείξετε ότι ισχύει : $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

β). Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

γ). Έστω η συνάρτηση $g(x) = \left\{\begin{matrix}\dfrac{\ln x}{f(x)}, & x>0\\ k, & x=0\end{matrix}\right\}$.

i). Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η § να είναι συνεχής.

ii). Αν $k = -\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (0, e).

ΛΥΣΗ

α). $f'(x) = (x - 2\cdot\ln x)' = 2\cdot x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x^2-2}{x}$, $x > 0$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2x^2-2}{x} = 0 \Rightarrow 2\cdot x = 2 \Rightarrow x = 1$, $x > 0$

x	0	1	+∞
f ′(x)	–		+
f(x)	↘		↗

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το f(1) = 1, άρα f(x) ≥ f(1) ⇒ f(x) ≥ 1, για κάθε x > 0.

β). → $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 - 2\cdot\ln x) = +\infty$.

άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x = 0 (y′y).

→ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$, διότι : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.

άρα δεν έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες.

γ). i). $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{f(x)} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{f'(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{2x-\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2x^2-2} = -\frac{1}{2}$. g(0) = k.

Για να είναι η g συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0) \Rightarrow k = -1$.

ii).→ η g είναι συνεχής στο [0, e].

→ $g(0) = -\frac{1}{2} < 0$.

→ $g(e) = \frac{\ln e}{f(e)} = \frac{1}{e^2-2} > 0$. Δηλαδή : g(0)·g(e) < 0.

Από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της g(x) = 0 [στο (0, e).

ΘΕΜΑ 4

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, +∞) για την οποία ισχύει f(x) > 0 για κάθε x > 0.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις : $F(x) = \int_0^x f(t)\cdot dt$, x ∈ [0, +∞), $h(x) = \frac{F(x)}{\int_0^x t\cdot f(t)\cdot dt}$, x ∈ (0, +∞).

α). Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}\cdot\left[f(t)+F(t)\right]\cdot dt = F(1)$.

β). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0, +∞).

γ). Αν h(1) = 2, τότε :

i). Να αποδείξετε ότι : $\int_0^2 f(t)\cdot dt < 2\cdot\int_0^2 t\cdot f(t)\cdot dt$.

ii).Να αποδείξετε ότι : $\int_0^1 F(t)\cdot dt = \frac{1}{2}\cdot F(1)$.

ΛΥΣΗ

α). $\int_0^1 e^{t-1}\cdot\left[f(t)+F(t)\right]\cdot dt=\int_0^1 e^{t-1}\cdot\left[F'(t)+F(t)\right]\cdot dt=\int_0^1\left[e^{t-1}\cdot F'(t)+e^{t-1}\cdot F(t)\right]\cdot dt=$

$=\int_0^1\left[e^{t-1}\cdot F(t)\right]'\cdot dt=\left[e^{t-1}\cdot F(t)\right]_0^1=e^0\cdot F(1)-e^{-1}\cdot F(0)$ = 1·F(1) – e^{-1}·0 = F(1).

β). Για x > 0 είναι : $h'(x)=\left(\dfrac{F(x)}{\int_0^x t\cdot f(t)\cdot dt}\right)'=\dfrac{F'(x)\cdot\int_0^x t\cdot f(t)\cdot dt-F(x)\cdot\left(\int_0^x t\cdot f(t)\cdot dt\right)'}{\left(\int_0^x t\cdot f(t)\cdot dt\right)^2}=$

$=\dfrac{f(x)\cdot\int_0^x t\cdot f(t)\cdot dt-F(x)\cdot x\cdot f(x)}{\left(\int_0^x t\cdot f(t)\cdot dt\right)^2}=\dfrac{f(x)\cdot\left[\int_0^x t\cdot f(t)\cdot dt-x\cdot F(x)\right]}{\left(\int_0^x t\cdot f(t)\cdot dt\right)^2}<0.$ διότι :

→ f ′(x) > 0

→ $\left(\int_0^x t\cdot f(t)\cdot dt\right)^2>0$

→ Θεωρούμε τη συνάρτηση φ, με φ(x) = $\int_0^x t\cdot f(t)\cdot dt$ – x·F(x), x ≥ 0.

Είναι φ′(x) = $\left[\int_0^x t\cdot f(t)\cdot dt-x\cdot F(x)\right]'=x\cdot f(x)-F(x)-x\cdot F'(x)=-F(x)<0$

διότι f(x) > 0 και F(x) = $\int_0^x f(t)\cdot dt$ > 0, για x > 0

Επομένως η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο [0 , +∞).

Για x > 0 ⇒ φ(x) < φ(0) ⇒ $\int_0^x t\cdot f(t)\cdot dt$ – x·F(x) < 0.

γ). 2 > 1 ⇒ h(2) < h(1) ⇒ $\dfrac{F(2)}{\int_0^2 t\cdot f(t)\cdot dt}<2\Rightarrow\dfrac{\int_0^2 f(t)\cdot dt}{\int_0^2 t\cdot f(t)\cdot dt}<2.$

και επειδή $\int_0^2 t\cdot f(t)\cdot dt$ > 0, αφού f(x) > 0 και 2 > 0.

$$\int_0^2 t\cdot f(t)\cdot dt\cdot\frac{\int_0^2 f(t)\cdot dt}{\int_0^2 t\cdot f(t)\cdot dt}<2\cdot\int_0^2 t\cdot f(t)\cdot dt\Rightarrow\int_0^2 f(t)\cdot dt<2\cdot\int_0^2 t\cdot f(t)\cdot dt.$$

δ). $h(1) = 2 \Rightarrow \dfrac{F(1)}{\int_0^1 t\cdot f(t)\cdot dt} = 2 \Rightarrow \int_0^1 t\cdot f(t)\cdot dt = \dfrac{F(1)}{2}$ (1)

Είναι $\int_0^1 F(t)\cdot dt = \int_0^1 (t)'\cdot F(t)\cdot dt = \left[t\cdot F(t)\right]_0^1 - \int_0^1 t\cdot F'(t)\cdot dt = F(1) - \int_0^1 t\cdot f(t)\cdot dt =$

$= F(1) - \dfrac{F(1)}{2} = \dfrac{F(1)}{2}$.