ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2009

ΜΑΙΟΣ 2009

ΘΕΜΑ 1

Α). Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Β). Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α). Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

β). Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

γ). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$.

δ). Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

ε). Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = α, x = β και τον άξονα x′x είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot dx$.

ΛΥΣΗ

Α). Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 251.

Β). Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 213.

Γ). α) Σωστό β) Σωστό γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς : $z = (2\cdot\lambda + 1) + (2\cdot\lambda - 1)\cdot i$, $\lambda \in R$.

Α). α). Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.

β). Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο. Μονάδες 8

Β). Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$, όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

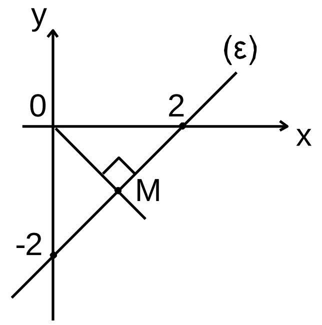
ΛΥΣΗ

$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)\cdot i$, $\lambda \in R$.

Α). α). Θέτουμε $\left\{\begin{matrix} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{matrix}\right\}$. Με απαλοιφή του λ προκύπτει η ευθεία (ε) : y = x – 2.

β). Από το Ο φέρουμε κάθετη στην ευθεία (ε). Το σημείο τομής Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού
με το μικρότερο μέτρο. Η εξίσωση της ΟΜ είναι: y = –x.

Είναι : $\begin{Bmatrix} y = x-2 \\ y=-x \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 1 \\ y=-1 \end{Bmatrix}$. Άρα Μ(1, –1) και z_0 =1 – i.



Β). Είναι : $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$ η εξίσωση. Αν $w = x + y \cdot i$, x, y ∈ R τότε με αντικατάσταση στην εξίσωση προκύπτει $(x^2+y^2+x-12) - y\cdot i = 1 - i \Rightarrow \begin{Bmatrix} x^2+y^2+x-12=1 \\ -y=-1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 3 \\ y=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = -4 \\ y=1 \end{Bmatrix}$.

Άρα οι μιγαδικοί w_1 = 3 + i και w_2 = –4 + i είναι οι λύσεις της εξίσωσης.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, x > –1, όπου α > 0 και α ≠ 1.
Α). Αν ισχύει f(x) ≥ 1 για κάθε x > –1, να αποδείξετε ότι α = e.
Β). Για α = e,
α). να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.
β). να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (–1, 0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, +∞).
γ). αν β, γ ∈ (–1, 0)∪(0, +∞), να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f\ \beta\ -1}{x-1} + \frac{f\ \gamma\ -1}{x-2} = 0$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, 2).

ΛΥΣΗ

$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, x > – 1 , 0 < α ≠ 1. Ισχύει f(x) ≥ 1, για x > –1 και f(0) = 1.
Άρα f(x) ≥ f(0). Δηλαδή x_0 = 0 είναι θέση ολικού ελάχιστου της f.
Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο R με
$f'(x) = \alpha^x \cdot \ln\alpha - \frac{1}{x+1}$, x > –1 άρα και στο x_0 = 0.
Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat ισχύει f ′(0) = 0 ⇒ lnα – 1 = 0 ⇒ lnα = 1 ⇒ α = e.

Β).α). Για α = e, είναι $f(x) = e^x - \ln(x+1)$, x > – 1
$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$, x > – 1 και $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, για κάθε x > –1
Άρα η f είναι κυρτή στο (–1, +∞).

β). Είναι f ′(0) = 0 και f ′′(x) > 0, για κάθε x ∈ (–1, +∞).
Άρα η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο (–1, +∞).
Έτσι ισχύει : – 1 < x < 0 ⇒ f ′(x) < f ′(0) ⇒ f ′(x) < 0
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (–1, 0].
x > 0 ⇒ f ′(x) > f ′(0) ⇒ f ′(x) > 0.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

γ). Η εξίσωση $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1}+\dfrac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ στο (1, 2) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση
$(x-2)\cdot(f(\beta)-1)+(x-1)\cdot(f(\gamma)-1)=0$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-2)\cdot(f(\beta)-1)+(x-1)\cdot(f(\gamma)-1)$, $x \in [1, 2]$.
→ Η g είναι συνεχής στο [1, 2] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
→ $g(1) = 1 - f(\beta)$ και $g(2) = f(\gamma) - 1$.
Επειδή το $x_0 = 0$ είναι θέση ολικού ελάχιστου της f ισχύει ότι $f(x) > 1$, για κάθε
$x \in (-1, 0)\cup(0, +\infty)$. Άρα $g(1) < 0$ και $g(2) > 0$.
Συνεπώς g(1)·g(2) , 0.
Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση g(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον λύση στο(1, 2).

ΘΕΜΑ 4

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει $\int_0^2 t-2\ \cdot f\ \ t\ \cdot dt=0$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις H(x) = $\int_0^x t\cdot f\ \ t\ \cdot dt$, $x \in [0, 2]$,

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{H\ \ x}{x}-\displaystyle\int_0^x f\ \ t\ \cdot dt+3, & x\in\ \ 0,2\\ 6\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x=0\end{cases}.$$

α). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2].
β). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει

$G'(x) = -\dfrac{H\ \ x}{x^2}$, $0 < x < 2$.

γ). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$.
δ). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha\cdot\int_0^{\xi} t\cdot f\ \ t\ \cdot dt=\xi^2\cdot\int_0^{\alpha} f\ \ t\ \cdot dt.$$

ΛΥΣΗ

α). Είναι : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-(1-t^2)}{t^2[1+\sqrt{1-t^2}]}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-1+t^2}{t^2[1+\sqrt{1-t^2}]}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{1}{2}$.

Άρα $G(0)=6\dfrac{1}{2}=3$. Θα υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{H(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}H'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}xf(x)=0\cdot f(0)=0,$ σύμφωνα με τον κανόνα του
De L’ Hospital.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{H(x)}{x}-\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right]=0-0+3=3.$ Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=3=G(0)$.

Συνεπώς η G είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
Επίσης η G είναι συνεχής στο (0,2] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Άρα η G είναι συνεχής στο [0, 2].

β). Στο διάστημα (0,2) η G είναι παραγωγίσιμη με

$$G'(x)=\frac{xH'(x)-H(x)}{x^2}-f(x)=\frac{H'(x)}{x}-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)=$$

$$=\frac{x\cdot f(x)}{x}-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)=f(x)-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)=-\frac{H(x)}{x^2},\ x\in(0,2).$$

γ). Είναι G(0) = 3.

Επίσης $\int_0^2 (t-2)f(t)dt=0 \Leftrightarrow \int_0^2 t\cdot f(t)dt=2\int_0^2 f(t)dt=0 \Leftrightarrow H(2)=2\int_0^2 f(t)dt.$

Άρα $G(2)=\dfrac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3 \Leftrightarrow G(2)=3.$

Συνεπώς G(0) = G(2) = 3.

Εφαρμόζεται συνεπώς το θεώρημα του Rolle για την G στο [0,2].

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον α ∈ (0, 2) τέτοιο ώστε

$$G'(\alpha)=0 \Leftrightarrow -\frac{\mathrm{H}(\alpha)}{\alpha^2}=0 \Leftrightarrow \mathrm{H}(\alpha)=0\,.$$

δ). Η G είναι συνεχής στο [0,α] και παραγωγίσιμη στο (0, α) με $G'(x)=\dfrac{H(x)}{x^2}$.

Σύμφωνα με το θεώρημα της Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ∈ (0, α) τέτοιο ώστε

$$G'(\xi)=\frac{G(\alpha)-G(0)}{\alpha} \Leftrightarrow -\frac{\mathrm{H}(\xi)}{\xi^2}=\frac{\dfrac{\mathrm{H}(\alpha)}{\alpha}-\int_0^\alpha f(t)dt+3-3}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\mathrm{H}(\xi)=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt \Leftrightarrow \alpha\int_0^\alpha t\cdot f(t)dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt.$$

ΙΟΥΛΙΟΣ 2009 – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ 1

Α). Έστω η συνάρτηση f(x) = $\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0 , + ∞) και ισχύει : f ′(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Β). Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Γ). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α). Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\overline{z^{\nu}} = \bar{z}^{\nu}$.

β). Η συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ). Αν $\lim_{x\to x_0}$ f(x) = 0 και f(x) < 0 κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

δ). Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R_1 = R – {x/ συνx = 0 } και ισχύει f ′(x) = – $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

ε). Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει $\int f'(x)\cdot dx = f(x) + c$, x ∈Δ όπου ο είναι μια πραγματική σταθερά.

ΛΥΣΗ

Α). Θεωρία　　　　Β). Θεωρία　　　　Γ). Σ, Σ, Λ, Λ, Σ

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει : (2 – i)·z + (2 + i)·$\bar{z}$ – 8 = 0.

α). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z = x + i·y οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

β). Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

γ). Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40$.

ΛΥΣΗ

α). (2 – i)·z + (2 + i)·$\bar{z}$ – 8 = 0 ⇒ 2·z – i·z + 2·$\bar{z}$ + i·$\bar{z}$ – 8 = 0 ⇒ 2·(z + $\bar{z}$) – i·(z – $\bar{z}$) – 8 = 0 ⇒

⇒ 2·(2·x) – i·(2·y·i) – 8 = 0 ⇒ 4·x + 2·y – 8 = 0 ⇒ 2·x + y – 4 = 0 ⇒ y = – 2·x + 4.　(1) ευθεία.

β). z_1 ∈ R και z_2 ∈ I, άρα z_1 = α　και　z_2 = β·i.

z_1 = α ∈ (1)　άρα (α, 0) ∈ (1)　άρα 0 = – 2·α + 4 ⇒ α = 2, άρα z_1 = 2.

z_2 = β·i ∈ (1)　άρα (0, β) ∈ (1)　άρα β = 0 + 4 ⇒ β = 4,　άρα z_1 = 4·i.

γ). Α = $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = |2 + 4\cdot i|^2 + |2 - 4\cdot i|^2 = \left(\sqrt{4+16}\right)^2 + \left(\sqrt{4+16}\right)^2 = 40$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln[(\lambda+1)\cdot x^2 + x + 1] - \ln(x + 2)$, $x > -1$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$.

Α). Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Β). Έστω ότι $\lambda = -1$.

α). Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β). Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

γ). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \neq 0$.

ΛΥΣΗ

Α). $f(x) = \ln[(\lambda+1)\cdot x^2 + x + 1] - \ln(x + 2) \Rightarrow f(x) = \ln\left(\dfrac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}\right) = \left\{\begin{array}{l} \overset{\lambda=-1}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = 1 \\ \overset{\lambda>-1}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{(\lambda+1)x^2}{x+2}\right) = +\infty \end{array}\right\}.$$

Άρα για $\lambda = -1$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

Β). Για $\lambda = -1$, έχουμε : $f(x) = \ln(x + 1) - \ln(x + 2) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$, $x > -1$.

α). $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} > 0$, για $x > -1$ άρα η f γνησιώς αύξουσα στο $(-1, +\infty)$.

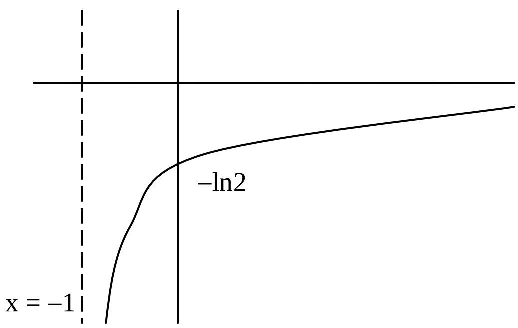
Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = (-1, +\infty)$, οπότε

$f(\Delta) = \left(\lim\limits_{x\to-1} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, 0)$.

β). $\to \lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$, άρα $x = -1$, κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\to \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, άρα $y = 0$, οριζόντια ασύμπτωτη.

γ). $f(x) + \alpha^2 = 0 \Rightarrow f(x) = -\alpha^2$, $\alpha \neq 0$.
Το $-\alpha^2$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$ άρα η $f(x) = -\alpha^2$, έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha \neq 0$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται μια συνάρτηση f : [0, 2] $\to$ R η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες $f''(x) - 4\cdot f'(x) + 4\cdot f(x) = k\cdot x\cdot e^{2\cdot x}$, $0 \le x \le 2$. $f'(0) = 2\cdot f(0)$, $f'(2) = 2\cdot f(2) + 12\cdot e^4$, $f(1) = e^2$, όπου κ ένας πραγματικός αριθμός.

α). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 3\cdot x^2 - \dfrac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$, $0 \le x \le 2$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [0, 2].

β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f''(\xi) + 4\cdot f(\xi) = 6\cdot\xi\cdot e^{2\cdot\xi} + 4\cdot f'(\xi)$.

γ). Να αποδείξετε ότι κ = 6 και ότι ισχύει g(x) = 0 για κάθε $x \in [0, 2]$.

δ). Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3\cdot e^{2\cdot x}$, $0 \le x \le 2$.

ε). Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\cdot dx$.

ΛΥΣΗ

α). Θ.Rolle για την g στο [0, 2].

$\to$ g συνεχής στο [0, 2].

$\to$ g παραγγίσιμη στο (0, 2) με $g'(x) = \dfrac{f''(x) - 4\cdot f'(x) + 4\cdot f(x)}{e^{2x}}$.

$\to$ g(0) = g(2) = 0. άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

β). Λόγω του ερωτήματος Α). υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ με $g'(\xi) = 0$, δηλαδή

$$6\cdot\xi - \frac{f''(\xi) - 4\cdot f'(\xi) + 4\cdot f(\xi)}{e^{2\cdot\xi}} = 0 \Rightarrow 6\cdot\xi = \frac{f''(\xi) - 4\cdot f'(\xi) + 4\cdot f(\xi)}{e^{2\cdot\xi}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 6\cdot\xi\cdot e^{2\cdot\xi} = f''(\xi) - 4\cdot f'(\xi) + 4\cdot f(\xi) \Rightarrow 6\cdot\xi\cdot e^{2\cdot\xi} + 4\cdot f'(\xi) = f''(\xi) - 4\cdot f(\xi)$.

γ). η (1) λόγω της υπόθεσης δίνει : $g'(x) = 6\cdot x - \dfrac{k\cdot x\cdot e^{2\cdot x}}{e^{2\cdot x}} \Rightarrow g'(x) = 6\cdot x - k\cdot x$.

προφανώς για k = 6 είναι $g'(x) = 0$, άρα g(x) = c και g(0) = 0, άρα c = 0 άρα g(x) = 0.

δ). $g(x) = 0 \Rightarrow 3\cdot x^2 - \dfrac{f'(x) - 2\cdot f(x)}{e^{2x}} = 0 \Rightarrow 3\cdot x^2 = \dfrac{f'(x) - 2\cdot f(x)}{e^{2x}} \Rightarrow 3\cdot x^2\cdot e^{2\cdot x} = f'(x) - 2\cdot f(x)$

$\Rightarrow 3\cdot x^2\cdot e^{2\cdot x}\cdot e^{-2\cdot x} = f'(x)\cdot e^{-2\cdot x} - 2\cdot f(x)\cdot e^{-2\cdot x} \Rightarrow 3\cdot x^2 = f'(x)\cdot e^{-2\cdot x} + f(x)\cdot(e^{-2\cdot x})' \Rightarrow$

$\Rightarrow [x^3]' = [f(x)\cdot e^{-2\cdot x}]' \Rightarrow f(x)\cdot e^{-2\cdot x} = x^3 + c$.

Και c = 0 άρα $f(x)\cdot e^{-2\cdot x} = x^3 \Rightarrow f(x) = x^3\cdot e^{2\cdot x}$.

ε). $$I = \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\cdot dx = \int_1^2 \frac{x^3\cdot e^{2x}}{x^2}\cdot dx = \int_1^2 x\cdot e^{2\cdot x}\cdot dx = \int_1^2 x\cdot\left(\frac{e^{2\cdot x}}{2}\right)'\cdot dx = \left[x\cdot\frac{e^{2\cdot x}}{2}\right]_1^2 - \frac{1}{2}\cdot\int_1^2 e^{2\cdot x}\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{2e^4 - e^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{e^{2\cdot x}}{2}\right]_1^2 = \frac{2e^4 - e^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{e^4 - e^2}{2}\right] = \frac{2e^4 - e^2}{2} - \frac{e^4 - e^2}{4} = \frac{3e^4 - e^2}{4}.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2010

ΜΑΙΟΣ 2010

ΘΕΜΑ Α

Α1). Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι :

$\to$ όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

$\to$ κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$.

Α2). Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Α3). Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Α4). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α). Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $\alpha + \beta\cdot i$ και $\gamma + \delta\cdot i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β). Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ). Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β), όπου $A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

δ). $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$, $x \in R$.

ε). Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$, κοντά στο x_0.

ΛΥΣΗ

Α1). Θεωρία, θεώρημα, σελίδα 304 σχολικού βιβλίου.

Α2). Θεωρία, ορισμός, σελίδα 279 σχολικού βιβλίου.

Α3). Θεωρία, ορισμός, σελίδα 273 σχολικού βιβλίου.

Α4). (α) $\to$ Σ (β). $\to$ Σ (γ) $\to$ Λ (δ) $\to$ Λ (ε) $\to$ Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$, όπου $z \in C$ με $z \neq 0$.

Β1). Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Β2). Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$.

Β3). Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w - 4 + 3\cdot i| = |z_1 - z_2|$, τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Β4). Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β3, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$.

ΛΥΣΗ

Β1). Είναι : $z + \frac{2}{z} = 2 \Rightarrow z^2 - 2\cdot z + 2 = 0$. Άρα $z_1 = \frac{2-2\cdot i}{2} = 1 - i$, $z_2 = \frac{2+2\cdot i}{2} = 1 + i$.

Β2). $1^η$ λύση :

Είναι : $z_1^{2010} + z_2^{2010} = (1-i)^{2010} + (1+i)^{2010} = [(1-i)^2]^{1005} + [(1+i)^2]^{1005} =$
$= (1-2\cdot i-1)^{1005} + (1+2\cdot i-1)^{1005} = (-2\cdot i)^{1005} + (2\cdot i)^{1005} = (-2)^{1005}\cdot i^{1005} + 2^{1005}\cdot i^{1005} =$
$= (-2)^{1005}\cdot i + 2^{1005}\cdot i = \quad = -2^{1005} + 2^{1005} = 0.$

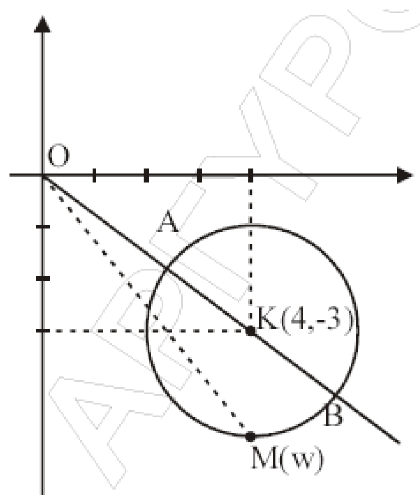
$2^η$ λύση :
Είναι : $z_1^{2010} + z_2^{2010} = (1-i)^{2010} + (1+i)^{2010} = (1-i)^{2010} + (-i^2+i)^{2010} =$
$= (1-i)^{2010} + [i\cdot(-i+1)]^{2010} = (1-i)^{2010} + i^{2010}\cdot(1-i)^{2010} = (1-i)^{2010}\cdot[1+i^{2010}] =$
$= (1-i)^{2010}\cdot[1+i^2] = (1-i)^{2010}\cdot(1-1) = (1-i)^{2010}\cdot 0 = 0.$

Β3). $1^{ος}$ τρόπος
Είναι $|w-4+3\cdot i| = |z_1 - z_2| \Rightarrow$ Είναι $|w-(4-3\cdot i)| = 2.$
άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ (4, –3) και ακτίνα ρ = 2.

$2^{ος}$ τρόπος
Είναι $|w-4+3\cdot i| = |z_1-z_2| \Rightarrow |w-4+3\cdot i| = |1-i-1-i| \Rightarrow |w-4+3\cdot i| = 2.$
Έστω $w = x + y\cdot i$, τότε $|x+y\cdot i-4+3\cdot i| = 2 \Rightarrow |(x-4)+(y+3)\cdot i| = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 2 \Rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4.$
Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ (4, –3) και ακτίνα ρ = 2.

$3^{ος}$ τρόπος
Είναι $|w-4+3\cdot i| = |z_1-z_2| \Rightarrow |w-4+3\cdot i| = |1-i-1-i| \Rightarrow |w-4+3\cdot i| = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow |w-4+3\cdot i|^2 = 4 \Rightarrow (w-4+3\cdot i)\cdot(\bar{w}-4-3\cdot i) = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow w\cdot\bar{w} + w\cdot(-4-3\cdot i) + \bar{w}\cdot(-4+3\cdot i) + (-4+3\cdot i)\cdot(-4-3\cdot i) = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow w\cdot\bar{w} - 4(w+\bar{w}) - 3\cdot i\cdot(w-\bar{w}) + 4^2 + 3^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4\cdot 2\cdot x - 3\cdot i\cdot 2\cdot y\cdot i + 4^2 + 3^2 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8\cdot x + 6\cdot y + 21 = 0 \qquad (1)$
Έχουμε : $A^2 + B^2 - 4\cdot\Gamma = 8^2 + 6^2 - 4\cdot 21 = 16 > 0$. άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο, με κέντρο
$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή Κ(4, – 3) και ακτίνα $ρ = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Β4). Το $|w|$ είναι η απόσταση της εικόνας Μ(w) από την αρχή Ο(0, 0), δηλαδή (ΟΜ). Από τη Γεωμετρία όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β τότε :
(ΟΑ) ≤ (ΟΜ) ≤ (ΟΒ) (1)
που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι το μήκος (ΟΒ) και η ελάχιστη το μήκος (ΟΑ). Όμως
→ (ΟΑ) = (ΟΚ) – ρ = 5 – 2 = 3 (2) και
→ (ΟΒ) = (ΟΚ) + ρ = 5 + 2 = 7.
Επομένως, λόγω των (1), (2) και (3) έχουμε : $3 \le |w| \le 7$.



$2^η$ λύση
Γράφουμε : $|w| = |w + (-4+3\cdot i) - (-4+3\cdot i)|$.

Οπότε σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα έχουμε :

$\left||w + \;\; -4+3i \;\;| - |-4+3i|\right| \le |w + \;\; -4+3i \;\; - \;\; -4+3i \;\;| \le |w + \;\; -4+3i \;\;| + |-4+3i|$ ή

$\left||z_1 - z_2| - |-4+3i|\right| \le |w| \le |z_1 - z_2| + |-4+3i| \Rightarrow \left||2-5| - |-4+3i|\right| \le |w| \le 2+5$. Άρα $3 \le |w| \le 7$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\cdot x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in R$.

Γ1). Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

Γ2). Να λύσετε την εξίσωση : $2\cdot(x^2 - 3\cdot x + 2) = \ln\left[\dfrac{\;3x-2\;^2 + 1}{x^4+1}\right]$.

Γ3). Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα y′y.

Γ4). Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I = $\int_{-1}^{1} x\cdot f \;\; x \;\; \cdot dx$.

ΛΥΣΗ

Γ1). Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο :

$f'(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2+1} \;\; x^2+1 \;\; ' = 2 + \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{2x^2+2x+2}{x^2+1} = \dfrac{2\;\; x^2+x+1}{x^2+1}$.

Επειδή $x^2 + x + 1 > 0$, καθώς και $x_2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in R$ είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in R$.
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Γ2). Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα :

$2\cdot(x^2 - 3\cdot x + 2) = \ln[(3\cdot x - 2)^2 + 1] - \ln(x^4 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot x^2 + \ln(x^4 + 1) = 2\cdot(3\cdot x - 2) + \ln[(3\cdot x - 2)^2 + 1] \Rightarrow f(x^2) = f(3\cdot x - 2)$ (1)

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι και 1−1. Επομένως από την (1) προκύπτει $f(x^2) = f(3\cdot x - 2) \Rightarrow x^2 = 3\cdot x - 2$. άρα x = 1 ή x = 2.

Γ3). 1ος τρόπος

Είναι $f''(x) = \left(2 + \dfrac{2x}{x^2+1}\right)' = 2\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' = 2\cdot\dfrac{x\;\;'\;\;x^2+1\;\; - x\;\; x^2+1\;\;'}{x^2+1} = 2\cdot\dfrac{x^2+1-2x^2}{x^2+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x) = \dfrac{2\cdot\;\;1-x^2}{x^2+1\;\;^2}$.

Είναι $f''(x) = 0 \Rightarrow \{\, x = -1$ ή $x = 1 \,\}$, ενώ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, 1)$ και $f''(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$.

Έτσι η C_f έχει σημεία καμπής στα σημεία με τετμημένες $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Η εφαπτόμενη της C_f, στο $x_1 = -1$, έχει εξίσωση :

$(\varepsilon_1) : y - f(-1) = f'(-1)\cdot(x + 1) \Rightarrow y - (-2 + \ln 2) = 1\cdot(x + 1) \Rightarrow y = x + \ln 2 - 1$.

Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_3 = 1$ έχει εξίσωση

$(\varepsilon_2) : y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1) \Rightarrow y - (2 + \ln 2) = 3\cdot(x - 1) \Rightarrow y = 3\cdot x - 1 + \ln 2$.

Για x = 0 προκύπτει $y = \ln 2 - 1$.

Οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(0, \ln 2 - 1)$ του άξονα y′y.

2ος τρόπος

Είναι $f''(x) = \left(2+\frac{2x}{x^2+1}\right)' = 2\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = 2\cdot\frac{(x)'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)} \Rightarrow \cdots \Rightarrow f''(x) = \frac{2\cdot(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

$A(-1, f(-1)) = (-1, -2 + \ln 2)$

$B(1, f(1)) = (1, 2 + \ln 2)$.

$(\varepsilon_1) : y - (-2 + \ln 2) = x + 1 \Rightarrow y = x - 1 + \ln 2$.

$(\varepsilon_2) : y - (2 + \ln 2) = 3\cdot(x - 1) \Rightarrow y = 3\cdot x - 1+\ln 2$

Παρατηρώ ότι για x = 0, οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο $\Gamma(0, -1 + \ln 2)$. Στον y′y

x	$-\infty$ … -1	… 1	… $+\infty$
$f''(x)$	–	+	–
f(x)			
	Σ.Κ.	Σ.Κ.	

Γ4). 1ος τρόπος

$$\int_{-1}^{1} x\cdot f(x)\cdot dx = \int_{-1}^{1}\left(2x^2+x\ln(x^2+1)\right)\cdot dx = \int_{-1}^{1}2x^2\cdot dx+\int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)\cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}2x^2\cdot dx+\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}(x^2+1)'\cdot\ln(x^2+1)\cdot dx =$$

$$=\int_{-1}^{1}2x^2\cdot dx+\frac{1}{2}\cdot\Big[(x^2+1)\cdot\ln(x^2+1)\Big]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}(x^2+1)\cdot\Big[\ln(x^2+1)\Big]'\cdot dx =$$

$$2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\cdot\Big[(x^2+1)\cdot\ln(x^2+1)\Big]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}(x^2+1)\cdot\frac{2x}{x^2+1}\cdot dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\cdot\Big[(x^2+1)\cdot\ln(x^2+1)\Big]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\cdot\Big[x^2\Big]_{-1}^{1} = 2\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot 0-\cdot\frac{1}{2}(1-1) = \frac{4}{3}.$$

Γ4). 2ος τρόπος

$$\int_{-1}^{1} x\cdot f(x)\cdot dx = \int_{-1}^{1}\left(2x^2+x\ln(x^2+1)\right)\cdot dx = \int_{-1}^{1}2x^2\cdot dx+\int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)\cdot dx.$$

$$\to \int_{-1}^{1}2x^2\cdot dx = 2\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2\cdot\left(\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right) = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$\to \int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)\cdot dx$$

Θέτουμε : $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2\cdot x\cdot dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x\cdot dx$, για $x = -1 \Rightarrow u = 2$, για $x = 1 \Rightarrow u = 2$

Άρα το ολοκλήρωμα γράφεται : $\int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)\cdot dx = \int_{2}^{2}\ln u\cdot\frac{du}{2} = 0$.

Συνεπώς : $\int_{-1}^{1}x\cdot f(x)\cdot dx = \frac{4}{3}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τις σχέσεις :

$f(x) \neq x, \ f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t}\cdot dt$.

Δ1). Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}$, $x \in R$.

Δ2). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2\cdot x\cdot f(x)$, $x \in R$, είναι σταθερή.

Δ3). Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$, $x \in R$.

Δ4). Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)\cdot dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)\cdot dt$, για κάθε $x \in R$

ΛΥΣΗ

Δ1). Η συνάρτηση $\varphi(t) = \frac{t}{\phi(t)-t}$ είναι :

α). ορισμένη σε όλο το R αφού $f(t) \neq t$, για κάθε $t \in R$ και

β). ορισμένη σε όλο το R ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Έτσι η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \phi(t)\cdot dt + x + 3$, είναι παραγωγίσιμη στο R, με

$f'(x) = \varphi(x) + 1 = \frac{x}{f(x)-x} + 1 = \frac{x + f(x) - x}{f(x)-x} = \frac{f(x)}{f(x)-x}$, $x \in R$.

Δ2). Η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R με

$g'(x) - [(f(x)^2 - 2\cdot x\cdot f(x)]' = 2\cdot f'(x)\cdot f(x) - 2\cdot f(x) - 2\cdot x\, f'(x) = 2\cdot f'(x)\cdot[f(x) - x] - 2\cdot f(x) =$

$= 2\cdot \frac{f(x)}{f(x)-x}\cdot (f(x)-x) - 2f(x) = 0$, $x \in R$.

Δ3). Είναι : $f(0) = 0 + 3 + \int_0^0 \frac{t}{f(t)-t}\cdot dt = 3$.

Λόγω του Δ2 είναι $(f(x))^2 - 2\cdot x\cdot f(x) = c$, $c \in R$.

Για $x = 0$, προκύπτει $c = (f(0))^2 - 2\cdot 0\cdot f(0) = 9$.

Έτσι $(f(x))^2 - 2\cdot x\cdot f(x) = 9 \Rightarrow (f(x))^2 - 2\cdot x\cdot f(x) + x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow [f(x) - x]^2 = x^2 + 9$. (1)

Αν θέσουμε $\varphi(x) = f(x) - x$, έχουμε ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής στο R και $h(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$ αφού $f(x) \neq x$, $x \in R$.

Άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R, δηλαδή είναι ή $h(x) > 0$, για κάθε $x \in R$ ή $h(x) < 0$, για κάθε $x \in R$.

Όμως $h(0) = f(0) - 0 = 3 > 0$ άρα $h(x) > 0$, $\forall x \in R$ και $f(x) > x$, $x \in R$. (2).

Από την (1) προκύπτει ότι $|f(x) - x| = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$, $x \in R$.

Δ4). 1ος τρόπος

$f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$, άρα $f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}} > 0$, $\forall x \in R$ επομένως f γνησίως αύξουσα.

Για κάθε t ∈ R ισχύει : t < t + 1 ⇒ f(t) < f(t + 1) ⇒ $\int_{x}^{x+1} f(t)\cdot dt < \int_{x}^{x+1} f(t+1)\cdot dt = \int_{x+1}^{x+2} f(t)\cdot dt$.

Διότι : αν θέσουμε u = t + 1 ⇒ du = dt, για t = x ⇒ u = x + 1, για t = x + 1 ⇒ u = x + 2.

Επομένως : $\int_{x}^{x+1} f(t+1)\cdot dt \overset{u=t+1}{=} \int_{x+1}^{x+2} f(u)\cdot du \overset{u=t}{=} \int_{x+1}^{x+2} f(t)\cdot dt$.

Δ4). 2ος τρόπος

Έστω F(x) = $\int_{x}^{x+1} f(t)\cdot dt$, x ∈ R. Είναι F(x) = $\int_{c}^{x+1} f(t)\cdot dt - \int_{c}^{x} f(t)\cdot dt$, ∀ x ∈ R, c ∈ R.

Και F ′(x) = f(x +1) − f(x) , x ∈ R (1)

Όμως f ′(x) = 1 + $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > \frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}} \geq 0$, ∀ x ∈ R.

Δηλαδή f ′(x) > 0, για κάθε x ∈ R, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.
Προκύπτει έτσι : x < x + 1 ⇒ f(x + 1) − f(x) > 0, x ∈ R. (2)
Λόγω των (1), (2) η F είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Επομένως : x < x + 1 ⇒ F(x) < F(x + 1) ⇒ $\int_{x}^{x+1} f(t)\cdot dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)\cdot dt$.

Δ4). 3η λύση :

Η F(x) = $\int_{0}^{x} f(t)\cdot dt$, είναι μια αρχική της f στο R και η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται :

F(x + 1) − F(x) < F(x + 2) − F(x + 1) ⇒ $\frac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x} < \frac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)}$.

Από το Θ.Μ.Τ. για την στα διαστήματα [x, x + 1] και [x + 1, x + 2] προκύπτει ότι υπάρχουν αντίστοιχα ξ_1 ∈ (x, x + 1) και ξ_2 ∈ (x + 1, x + 2) ώστε $\frac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x} = F'(\xi_1) = f(\xi_1)$ και

$\frac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)}$ = F′(ξ_2) = f ′(ξ_2).

Έτσι αρκεί να δειχθεί f(ξ_1) < f(ξ_2) με $\xi_1 < \xi_2$, ή ισοδύναμα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι

f ′(x) = $\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)' = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{x+\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}} > \frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}} \geq 0$, για κάθε x ∈ R.

δηλαδή f ′(x) > 0, για κάθε x ∈ R και η f γνησίως αύξουσα στο R.

ΙΟΥΛΙΟΣ 2010 – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = ημx$, $x \in R$, είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $(ημx)' = συνx$. Μονάδες 8

Α2). Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της ; Μονάδες 4

Α3). Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$; Μονάδες 3

Α4). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α). Αν $f(x) = α^x$, $α > 0$, τότε ισχύει $(α^x)' = x \cdot α^{x-1}$.

β). Αν ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε πάντοτε ισχύει fog = gof.

γ). Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

δ). Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και ισχύει $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [α, β]$, β τότε $\int_α^β f(x) \cdot dx \geq 0$.

ε). Για κάθε $z \in C$ ισχύει $|z|^2 = z \cdot z$. Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

Α1). Θεωρία Α2). Θεωρία Α3). Θεωρία Α4). Σ, Λ, Σ, Σ, Λ

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν $z_1 + z_2 = -2$ και $z_1 \cdot z_2 = 5$.

Β1). Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2. Μονάδες 5

Β2). Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x + 1)^2 + y^2 = 4$. Μονάδες 8

Β3). Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β2 να βρείτε εκείνους για τους οποίους Ισχύει $2 \cdot Re(w) + Im(w) = 0$. Μονάδες 6

Β4). Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος Β2 με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$. Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

Β1). Βρίσκουμε τους z_1, z_2 τύποι Vietta ή με τη λύση του συστήματος των εξισώσεων $\{ z_1 + z_2 = -2$ και $z_1 \cdot z_2 = 5\} \Rightarrow$

$$z_2 = \frac{5}{z_1}, z_1 + z_2 = -2 \Leftrightarrow z_1 + \frac{5}{z_1} = -2 \Leftrightarrow z_1^2 + 2z_1 + 5 = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \cdot$$

Αν $z_1 = -1 + 2 \cdot i$, τότε $z_2 = -1 - 2 \cdot i$, ή Αν $z_1 = -1 - 2 \cdot i$, τότε $z_2 = -1 + 2 \cdot i$

Β2). $|w-z_1|^2+|w-z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow |w+1-2\cdot i|^2+|w+1+2\cdot i|^2=|4\cdot i|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; (w+1-2\cdot i)\cdot(\bar{w}+1+2\cdot i)+(w+1+2\cdot i)\cdot(\bar{w}+1-2\cdot i)=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; (w+1)\cdot(\bar{w}+1)+2\cdot i\cdot(w+1)-2\cdot i\cdot(\bar{w}+1)+4+(w+1)\cdot(\bar{w}+1)-$

$-2\cdot i\cdot(w+1)+2\cdot i\cdot(\bar{w}+1)+4=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\big((w+1)\cdot(\bar{w}+1)+\cancel{2i\cdot(w+1)-2i\cdot(\bar{w}+1)}+(w+1)\cdot(\bar{w}+1)\cancel{-2i\cdot(w+1)+2i\cdot(\bar{w}+1)}=8$

$\Leftrightarrow 2\cdot(w+1)\cdot(\bar{w}+1))=8 \Leftrightarrow |w+1|^2=4 \Leftrightarrow |w+1|=2\cdot$

Αν w = x + y·i, x, y $\in$ R, τότε $(x+1)^2+y^2=2^2$ (1), αφού κάθε μιγαδικός w = x + y·i, επαληθεύει την (1) αλλά και το αντίστροφο , ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(–1, 0) και ακτίνα ρ = 2.

Β3). 2·Re(w) + Im(w) = 0 $\Rightarrow$ 2·x + y = 0 $\Leftrightarrow$ y = – 2·x (2)

Για να βρούμε τους μιγαδικούς λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) :

(1) $\Leftrightarrow (x+1)^2+4\cdot x^2=4 \Leftrightarrow 5\cdot x^2+2\cdot x-3=0$, $\Delta=2^2+60=64$, x = $\dfrac{-2\pm 8}{10}=\dfrac{3}{5}$ ή –1.

Αν $x=\dfrac{3}{5} \Leftrightarrow y=-\dfrac{6}{5}$, $w=\dfrac{3}{5}-\dfrac{6}{5}\cdot i$ ή αν x = – 1 $\Leftrightarrow$ u = 2, w = – 1 + 2·i.

Β4). Α′ τρόπος. Θέτουμε $z_1=w_1+1$, $z_2=w_2+1$, οπότε έχουμε $|z_1|=2$, $|z_2|=2$ και $|z_1-z_2|=|w+1-w_2-1|=4$.

Σύμφωνα με τη γνωστή ισότητα : $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\cdot|z|^2+2\cdot|z_2|^2$.

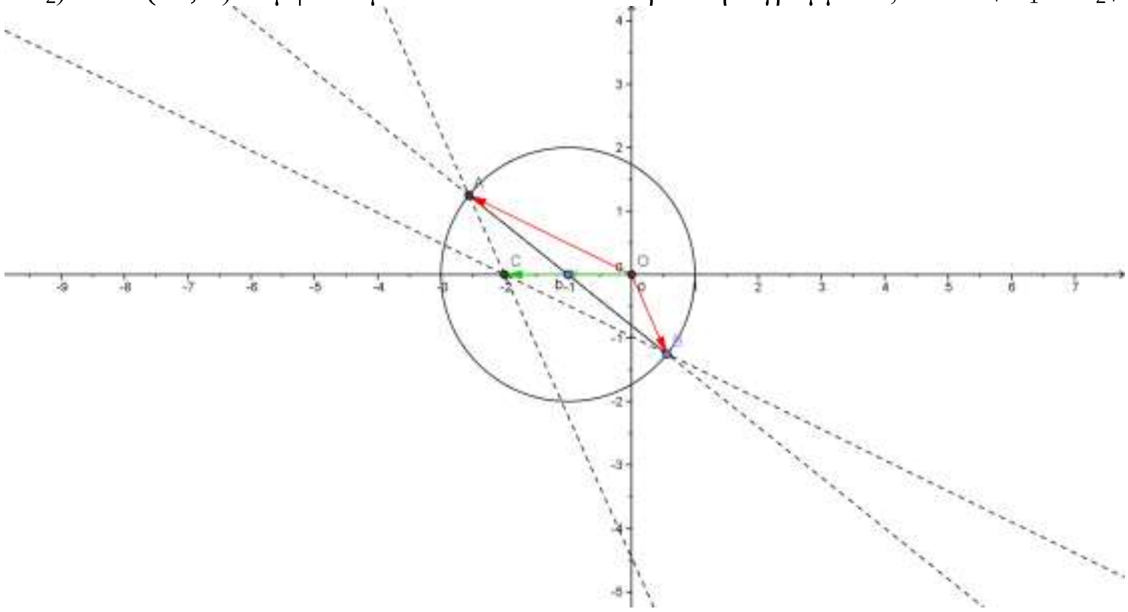
Έχουμε $4^2+|z_1+z_2|^2=2\cdot 2^2+2\cdot 2^2 \Leftrightarrow 16+|z_1+z_2|^2=16 \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=0$.

Με βάση τις αντικαταστάσεις $|w_1+1+w_2+1|=0 \Leftrightarrow w_1+w_2+2=0 \Leftrightarrow w_1+w_2=-2$.

επομένως $|w_1+w_2|=2$.

Β′ τρόπος. Γεωμετρική λύση του Β4 ,

αφού τα w_1, w_2 ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο του Β2 και $|w_1-w_2|=4$, οι εικόνες $A(w_1)$, $B(w_2)$, είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου(από δεδομένο (ΑΒ) = 4) άρα η εικόνα του w_1+w_2 είναι $C(w_1+w_2)$ και C(–2, 0) σύμφωνα με το κανόνα του «παραλληλογράμμου», οπότε $|w_1+w_2|=2$.



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\cdot \ln x + x - 3$, $x > 0$.

Γ1).Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Μονάδες 5

Γ2).Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Μονάδες 5

Γ3).Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες. Μονάδες 6

Γ4).Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος Γ3 με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi\cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

Γ1). $f(x) = (x-2)\cdot \ln x + x - 3$, $x > 0$, η f είναι συνεχής ως «πράξη» συνεχών.

α). Κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0^+ ($x > 0$) : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -2\cdot(-\infty) = +\infty$.

άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα y′y.

β). Πλάγια ασύμπτωτη : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x}\right)\cdot \ln x + 1 - \frac{3}{x}\right] = +\infty$, άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Γ2). $f'(x) = [(x-2)\cdot \ln x + x - 3]' = \ln x + (x-2)\cdot \frac{1}{x} + 1 = \ln x + 2\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$.

Για $x = 1$, $f'(1) = 0$, άρα το 1 είναι ρίζα της f', θα δείξουμε ότι αυτή είναι μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$. Θα μελετήσουμε τη μονοτονία της f', $f''(x) = \frac{1}{x} + 2\cdot\frac{1}{x^2} > 0$, για $x > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και συνεχής ,οπότε και «1–1», επομένως η ρίζα 1 της $f'(x) = 0$ είναι μοναδική.

x	0 1	+∞
f ′(x)	–	+
f(x)	↘	↗

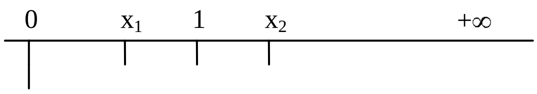
Παρουσιάζει ελάχιστο στην θέση $x = 1$, με ελάχισατη τιμή $f(1)= -2$.

Γ3). το πλήθος των ριζών της $f(x) = 0$, το βρίσκουμε αν έχουμε το σύνολο τιμών της f.

Το σύνολο τιμών της f είναι $f((0, +\infty)) = f((0, 1])\cup f([1,+\infty))$.

Στο (0,1] η f είναι γν. φθίνουσα άρα $f((0, 1]) = [f(1) , \lim\limits_{x\to 0^+} f(x))) = [-2, +\infty)$.

Άρα στο (0, 1] έχει μοναδική ρίζα , αφού $0 \in [-2, +\infty)$ και σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ θα υπάρχει x_1 (ρίζα), $x_1 \in (0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$, αυτή είναι μοναδική γιατί η f είναι 1–1 ως γν. φθίνουσα.
Ομοίως θα υπάρχει μοναδική ρίζα x_2 στο διάστημα $[1, +\infty)$, επομένως η f έχει 2 ρίζες.



Με $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Γ4). $\xi\cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\xi\cdot f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x > 0$ με $g'(x) = \dfrac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2}$ και εφαρμόζουμε Θ.Rolle στο $[x_1, x_2]$:

→ η g είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγ/μων άρα και συνεχής και

→ $g(x_1) = g(x_2) = 0$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ, $\xi \in (x_1, x_2)$: $g'(\xi) = 0$

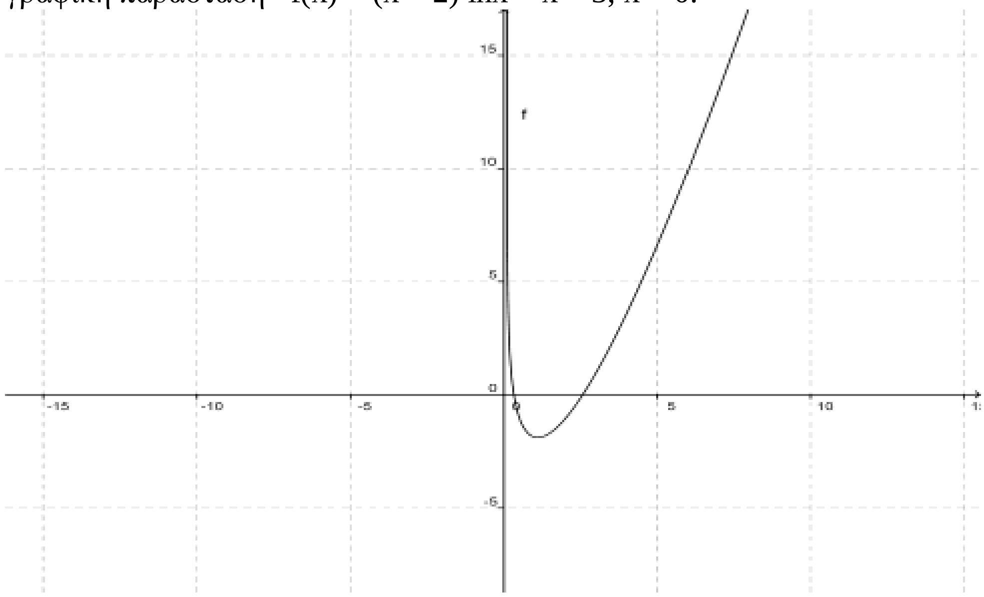
$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\xi\cdot f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \xi\cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$ (1)

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ είναι (ε) : $y - f(\xi) = f'(\xi)\cdot(x - \xi)$ (2),

αντικαθιστούμε από την (1) στη (2) $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi}$, έχουμε (ε) : $y - f(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi}\cdot(x - \xi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y - f(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi}\cdot x - f(\xi)$. Άρα ή εφαπτομένη $y = \dfrac{f(\xi)}{\xi}\cdot x$, διέρχεται από το O(0, 0)

γραφική παράσταση $f(x) = (x - 2)\cdot \ln x + x - 3$, $x > 0$.



ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο R με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$.

Δ1). Να αποδείξετε ότι $f(x) \ge 1$ για κάθε $x \in R$. Μονάδες 4

Δ2). Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\int_0^1 f(x\cdot t)\cdot dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = +\infty$.

Μονάδες 6

Αν επιπλέον δίνεται ότι $f'(x) + 2x = 2\cdot x\cdot[f(x) + x^2]$, $x \in R$, τότε :

Δ3). Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x^2$, $x \in R$. Μονάδες 8

Δ4). Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x) = \int_x^{x+2} f(t)\cdot dt$, $x \ge 0$.

και να λύσετε στο R την ανίσωση $\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)\cdot dt + \int_6^4 f(t)\cdot dt < 0$. Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

Δ1). Η συνάρτηση f είναι κυρτή, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή :

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει : $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$, άρα η f γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ ισχύει : $x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$, άρα η f γνησίως φθίνουσα.

Για $x = 0$, ισχύει $f'(0) = 0$, δηλαδή στο $x = 0$, η f' έχει τοπικό ελάχιστο και είναι η μοναδική ρίζα.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει : $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 1$, άρα η f γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ ισχύει : $x < 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 1$, άρα η f γνησίως φθίνουσα.

Για $x = 0$, ισχύει $f(0) = 1$, δηλαδή για κάθε $x \in R$, ισχύει : $f(x) \ge 1$.

Δ2). Θέτουμε όπου $u = x\cdot t \Rightarrow du = x\cdot dt$, για $t = 0 \Rightarrow u = 0$, για $t = 1 \Rightarrow u = x$. άρα :

$x\cdot\int_0^1 f(x\cdot t)\cdot dt = \int_0^x f(u)\cdot du$. Και για το όριο έχουμε :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\int_0^1 f(x\cdot t)\cdot dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\cdot du + x^3}{\eta\mu^3 x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(u)\cdot du + x^3\right)'}{(\eta\mu^3 x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) + 3\cdot x^2}{3\cdot\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$= \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Δ3). Ισχύει : $f'(x) + 2x = 2\cdot x\cdot(f(x) + x^2) \Rightarrow \dfrac{f'(x) + 2x}{f(x) + x^2} = 2x \Leftrightarrow [\ln(f(x) + x^2)]' = (x^2)' \Leftrightarrow$

Με τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c \in R$: $\ln(f(x) + x^2) = x^2 + c$.

Άρα $f(x) + x^2 = e^{x^2+c}$, για $x = 0$, $f(0) + 0^2 = e^{0+c} \Leftrightarrow 1 = e^c \Leftrightarrow c = 0$.

οπότε $f(x) + x^2 = e^{x^2} \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2$.

Δ4). Για $x \geq 0$, $h(x) = \int_x^{x+2} f(t) \cdot dt = \int_x^1 f(t) \cdot dt + \int_1^{x+2} f(t) \cdot dt = -\int_1^x f(t) \cdot dt + \int_1^{x+2} f(t) \cdot dt$.

Άρα : $h'(x) = \left(-\int_1^x f(t) \cdot dt + \int_1^{x+2} f(t) \cdot dt\right)' = -\left(\int_1^x f(t) \cdot dt\right)' + \left(\int_1^{x+2} f(t) \cdot dt\right)' = f(x+2) - f(x)$. (1)

Έχουμε : $f(x) = e^{x^2} - x^2 \Leftrightarrow f'(x) = 2\cdot x\cdot e^{x^2} - 2\cdot x = 2\cdot x\cdot(e^{x^2} - 1)$, $f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Και $e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ γνησίως αύξουσα.
Από την (1) $\Leftrightarrow h'(x) = f(x + 2) - f(x) > 0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα.

$h(x) = \int_x^{x+2} f(t) \cdot dt$, $x \geq 0$, αφού $x^2 + 2\cdot x + 1 \geq 0$ και συνεχής ορίζεται η

$h(x^2 + 2x + 1) = \int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t) \cdot dt$ και $h(4) = \int_4^6 f(t) \cdot dt$. οπότε :

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t) \cdot dt + \int_6^4 f(t) \cdot dt < 0 \Leftrightarrow h(x^2 + 2\cdot x + 1) < h(4) \Leftrightarrow x^2 + 2\cdot x + 1 < 4 \Leftrightarrow x^2 + 2\cdot x - 3 < 0$$

x	$-\infty$	-3	1	$-\infty$
$x^2 + 2\cdot x - 3$	+	–	+	

Άρα $x \in (-3, 1)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΙΟΣ 2011

ΘΕΜΑ Α

Α1). Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι : $f'(x_0) = 0$. Μονάδες 10

Α2). Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο R. Πότε η ευθεία $y = \lambda\cdot x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; Μονάδες 5

Α3). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α). Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$.

β). Μια συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται συνάρτηση 1−1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή : αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

γ). Για κάθε $x \in R = R - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ ισχύει: $(\varepsilon\varphi x)' = -\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

δ). Ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$.

ε). Οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x′Oy′. Μονάδες 10

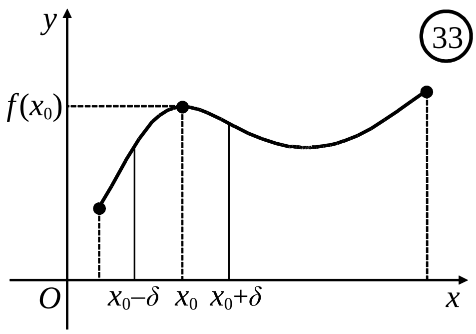
ΛΥΣΗ

Α1). Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$



Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.
Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Α2). Η ευθεία $y = \lambda\cdot x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda\cdot x+\beta)] = 0$, αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda\cdot x+\beta)] = 0$.

Α3). α) $\to$ Σ , β). $\to$ Σ , γ). $\to$ Λ , δ). $\to$ Λ, ε). $\to$ Σ.

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3\cdot i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις :
$|z - 3\cdot i| + |\bar{z} + 3\cdot i| = 2$ και $w = z - 3\cdot i + \dfrac{1}{z-3\cdot i}$.
Β1). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z. Μονάδες 7
Β2). Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3\cdot i = \dfrac{1}{z-3\cdot i}$. Μονάδες 4
Β3). Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \le w \le 2$. Μονάδες 8
Β4). Να αποδείξετε ότι : $|z - w| = |z|$. Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

Β1). $|z-3\cdot i|+|\bar{z}+3\cdot i|=2 \Leftrightarrow |z-3\cdot i|+|\overline{z-3\cdot i}|=2 \overset{|\overline{z-3i}|=|z-3i|}{\Leftrightarrow} 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3\cdot i|=1$ οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z είναι κύκλος με κέντρο Κ(0, 3) (την εικόνα του 3·i) και ακτίνα ρ = 1.

Β2). Από τη σχέση

$$|z-3\cdot i|=1 \Leftrightarrow |z-3\cdot i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3\cdot i)\cdot(\overline{z-3\cdot i})=1 \Leftrightarrow (z-3\cdot i)\cdot(\bar{z}+3\cdot i)=1$$

$$\overset{z\neq 3i \Leftrightarrow z-3i\neq 0}{\Leftrightarrow} \bar{z}+3\cdot i=\frac{1}{z-3\cdot i} \quad (1)$$

Β3). Είναι $w=z-3\cdot i+\dfrac{1}{z-3\cdot i} \overset{(1)}{\Rightarrow} w=z-3\cdot i+\bar{z}+3\cdot i \Rightarrow w=z+\bar{z} \overset{z=x+yi}{\Rightarrow} w=2\cdot x$.

Επειδή όμως ο z κινείται στον κύκλο του Β1 ερωτήματος θα ισχύει :

$$x^2+(y-3)^2=1 \overset{(y-3)^2\ge 0}{\Rightarrow} x^2\le 1 \Rightarrow \sqrt{x^2}\le 1 \Rightarrow |x|\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} -2\le 2x\le 2 \overset{w=2x}{\Rightarrow} -2\le w\le 2.$$

Β4). Είναι :

$$z=x+i\cdot y \overset{w=2x}{\Rightarrow} z-w=x+i\cdot y-2x \Rightarrow z-w=-x+i\cdot y \Rightarrow$$

$$z-w=-(x-i\cdot y) \Rightarrow z-w=-\bar{z} \Rightarrow |z-w|=|-\bar{z}| \overset{|-\bar{z}|=|z|}{\Rightarrow} |z-w|=|z|.$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση : $e^x\cdot(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x\cdot f''(x)$, για κάθε $x \in R$.
Γ1). Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in R$. Μονάδες 8
Γ2). Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 3
Γ3). Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής. Μονάδες 7
Γ4). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x)$ = συνx, έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (0, π/2). Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

Γ1). Έχουμε : $e^x\cdot(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+x\cdot f''(x) \Rightarrow (e^x\cdot f'(x)-e^x)'=(x\cdot f'(x))'$

$$\Rightarrow e^x\cdot f'(x)-e^x=x\cdot f'(x)+c : (1)$$

Για $x=0 \overset{1}{\Rightarrow} e^0 \cdot f'(0) - e^0 = 0 \cdot f(0) + c \overset{f'(0)=f(0)=0}{\Rightarrow} c=-1$ οπότε ισχύει :

$e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) - 1 \Rightarrow e^x \cdot f'(x) - x \cdot f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f'(x) \cdot (e^x - x) = e^x - 1$ (2)

Θα δείξω ότι $e^x - x > 0$, για κάθε πραγματική τιμή του x.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x - x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R με

$h'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1$ και $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Για $x > 0 \overset{e^t \uparrow}{\Rightarrow} e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$ και ομοίως

$x < 0 \overset{e^t \uparrow}{\Rightarrow} e^x < e^0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0 \Rightarrow h'(x) < 0$ οπότε η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $h(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$, άρα από την (2) θα έχουμε :

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x} \overset{e^x - x > 0}{\Rightarrow} f'(x) = \left(\ln(e^x - x)\right)' \Rightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c_1 \ :(3)$$

Για $x = 0 \overset{3}{\Rightarrow} f(0) = \ln(e^0 - 0) + c_1 \overset{f(0)=0}{\Rightarrow} 0 = \ln 1 + c_1 \Rightarrow 0 = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \overset{3}{\Rightarrow} f(x) = \ln(e^x - x)$

Γ2. Είναι $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$ με $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} = 0 \overset{e^x - x > 0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Θα είναι για $x > 0 \overset{e^t \uparrow}{\Rightarrow} e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \overset{e^x - x > 0}{\Rightarrow} \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty) \subseteq R$ η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Επίσης για $x < 0 \overset{e^t \uparrow}{\Rightarrow} e^x < e^0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0 \overset{e^x - x > 0, \forall x \in R}{\Rightarrow} \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0] \subseteq R$ η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $\min f = f(0) = \ln(e^0 - 0) = 0$

Γ3). Είναι $f''(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x - x}\right)' = \left(\dfrac{e^x - x + x - 1}{e^x - x}\right)' = \left(1 + \dfrac{x - 1}{e^x - x}\right)' = \dfrac{e^x - x - (x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} =$

$$\frac{e^x - x - x \cdot e^x + x + e^x - 1}{(e^x - x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2 \cdot e^x - x \cdot e^x - 1}{(e^x - x)^2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2 \cdot e^x - x \cdot e^x - 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R (πράξεις με παραγωγίσιμες) με $g'(x) = (2e^x - xe^x - 1)' = 2e^x - e^x - xe^x = e^x - xe^x \Rightarrow \ldots g'(x) = e^x(1 - x)$

Με $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1 - x) = 0 \overset{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Για $x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0 \overset{e^x > 0}{\Rightarrow} e^x(1 - x) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$, άρα g γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και για $x > 1 \Rightarrow 1 - x < 0 \Rightarrow e^x \cdot (1 - x) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow$ g γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Οπότε η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 το $g(1) = 2 \cdot e - e - 1 = e - 1 > 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2e^x - xe^x - 1) \overset{\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x \overset{(-\infty) \cdot 0}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \underset{Del'Hosp}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0, \ \lim\limits_{x \to -\infty} (2e^x) = 0}{=} 0 - 0 - 1 = -1$

Και $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[e^x (2 - x) - \dfrac{1}{e^x}\right] \overset{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \ \lim\limits_{x \to -\infty} (2 - x) = -\infty}{=} (+\infty) \cdot (-\infty) - 0 = -\infty$

Έτσι για την g ισχύει: $g\left(\left[1,+\infty\right)\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}g(x),\, g(1)\right]=\left(-\infty, e-1\right]\ni 0 \Rightarrow$ υπάρχει $x_1 \in [1, +\infty)$ ώστε $g(x_1) = 0$ το οποίο είναι και μοναδικό λόγω της μονοτονίας της g στο $[1, +\infty)$ και για

$$x > x_1 \geq 1 \overset{g\downarrow [1,+\infty)}{\Rightarrow} g(x) > g(x_1) \overset{g(x_1)=0}{\Rightarrow} g(x) > 0 \overset{\left(e^x-x\right)^2>0}{\Rightarrow} f''(x) > 0 \text{ και για}$$

$$1 \leq x < x_1 \overset{g\downarrow [1,+\infty)}{\Rightarrow} g(x) < g(x_1) \overset{g(x_1)=0}{\Rightarrow} g(x) < 0 \overset{\left(e^x-x\right)^2>0}{\Rightarrow} f''(x) < 0$$

Οπότε η f παρουσιάζει ένα μόνο σημείο καμπής το $M_1(x_1, f(x_1))$ στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Ομοίως για την g ισχύει: $g\left(\left(-\infty,1\right]\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),\, g(1)\right]=\left(-1, e-1\right]\ni 0 \Rightarrow$ υπάρχει $x_2 \in (-\infty, 1]$ ώστε $g(x_2) = 0$ το οποίο είναι και μοναδικό λόγω της μονοτονίας της g στο $(-\infty, 1]$ και για

$$1 \geq x > x_2 \overset{g\uparrow (-\infty,1]}{\Rightarrow} g(x) > g(x_2) \overset{g(x_2)=0}{\Rightarrow} g(x) > 0 \overset{\left(e^x-x\right)^2>0}{\Rightarrow} f''(x) > 0 \text{ και για}$$

$$x < x_2 \leq 1 \overset{g\uparrow (-\infty,1]}{\Rightarrow} g(x) < g(x_2) \overset{g(x_2)=0}{\Rightarrow} g(x) < 0 \overset{\left(e^x-x\right)^2>0}{\Rightarrow} f''(x) < 0$$

Οπότε η f παρουσιάζει ένα μόνο σημείο καμπής το $M_2(x_2, f(x_2))$ στο διάστημα $(-\infty, 1]$

Γ4). Θεωρούμε τη συνάρτηση k(x) = f(x) – συνx, η οποία είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και

$k(0) = f(0) - \sigma\upsilon\nu 0 = 0 - 1 = -1$ και $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) > 0$

διότι $\min(e^x - x) = 1$, όπως δείξαμε για x = 0, οπότε για $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} > 1 \Rightarrow \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) > 0$.

οπότε από το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $k(x_0) = 0$.

Επειδή προφανώς η k είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (διαφορά παραγωγισίμων) με

$$k'(x) = f'(x) + \eta\mu x \overset{f'(x)>0,\forall x\in(0,+\infty)\supset\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ \eta\mu x>0\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Rightarrow} k'(x) > 0 \Rightarrow$$ η συνάρτηση k είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και άρα το $x_0 : k(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ldots \ln\left(e^{x_0} - x_0\right) = \sigma\upsilon\nu x_0$ είναι μοναδικό

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g : R → R, οι οποίες για κάθε x ∈ R ικανοποιούν τις σχέσεις :

i). f(x) > 0, και g(x) > 0

ii). $\dfrac{1 - f(x)}{e^{2\cdot x}} = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{e^{2\cdot t}}{g(x+t)} \cdot dt$

iii). $\dfrac{1 - g(x)}{e^{2\cdot x}} = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{e^{2\cdot t}}{f(x+t)} \cdot dt$.

Δ1). Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R και ότι f(x) = g(x), για κάθε x ∈ R. Μονάδες 9

Δ2). Να αποδείξετε ότι : $f(x) = e^x$, x ∈ R. Μονάδες 4

Δ3). Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$. Μονάδες 5

Δ4). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F(x) = $\int_1^x f(t^2)\cdot dt$, τους άξονες x′x και y′y και την ευθεία με εξίσωση x = 1.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

Δ1). Είναι

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt\overset{\substack{u=x+t\Rightarrow du=dt,\,t=u-x\\ t=0\Rightarrow u=x,\,t=-x\Rightarrow u=0}}{\Rightarrow}\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_x^0\frac{e^{2(u-x)}}{g(u)}du=\int_x^0\frac{e^{2u}\cdot e^{-2x}}{g(u)}du=e^{-2x}\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=e^{-2x}\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Rightarrow 1-f(x)=e^{2x}\cdot e^{-2x}\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du\overset{e^{2x}\cdot e^{-2x}=e^0=1}{\Rightarrow}1-f(x)=\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=1-\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Rightarrow f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\,.$$

Ομοίως λόγω συμμετρικής σχέσης βρίσκουμε : $g(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$

Επειδή η g είναι συνεχής στο R θα είναι και $\dfrac{e^{2u}}{g(u)}$ συνεχής στο R (πηλίκο συνεχών) και επειδή $0\in R$ θα είναι η $\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}\cdot du$ παραγωγίσιμη στο R οπότε και η $f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}\cdot du$ παραγωγίσιμη με $f'(x)=\left(1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\right)'\Rightarrow f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{g(x)}$. (1)

Για τον ίδιο λόγω (λόγω συμμετρικών σχέσεων) βρίσκουμε ότι και η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=\left(1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\right)'\Rightarrow g'(x)=\dfrac{e^{2x}}{f(x)}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι :

$$f'(x)g(x)=f(x)'g(x)=e^{2x}\Rightarrow f'(x)g(x)-f(x)'g(x)=0\overset{g(x)>0}{\Rightarrow}\frac{f'(x)g(x)-f(x)'g(x)}{\left[g(x)\right]^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=c\overset{\left(f(0)=1+\int_0^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du=1,\,g(0)=1+\int_0^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du=1\right)\Rightarrow c=1}{\Rightarrow}f(x)=g(x)\,.$$

Δ2). Με g(x) = f(x), θα έχουμε : $f'(x)\cdot f(x)=e^{2x}\Rightarrow 2f'(x)\cdot f(x)=2e^{2x}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'\Rightarrow f^2(x)=e^{2x}+c_1\overset{f(0)=e^0=1\Rightarrow c_1=0}{\Rightarrow}f^2(x)=e^{2x}\overset{f(x)>0}{\Rightarrow}f(x)=e^x,\,x\in R$$

Δ3). $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}\overset{u=\frac{1}{x}\Rightarrow \lim\limits_{u\to 0^-}u=-\infty,\, x=\frac{1}{u}}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\frac{1}{u}}{e^u}=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{1}{ue^u}\Rightarrow$

$\overset{\lim\limits_{u\to-\infty}(ue^u)=\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{u}{e^{-u}}\overset{DeL'Hosp}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{1}{-e^{-u}}=-\infty}{\Rightarrow}\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=-\infty$.

Δ4). Επειδή $f(t^2)=e^{2\cdot t}>0$, για $x\in[0,1]$ θα είναι $F(x)\le 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι :

$$E=\int_0^1|F(x)|dx=-\int_0^1 F(x)\,dx=-\int_0^1\left(\int_1^x f(t^2)\,dt\right)dx=-\int_0^1\left((x)'\int_1^x f(t^2)\,dt\right)dx=$$

$$=-\left[x\int_1^x f(t^2)\,dt\right]_0^1-\left[-\int_0^1\left(x\left(\int_1^x f(t^2)\,dt\right)'\right)dx\right]=-1\cdot\int_1^1 f(t^2)\,dt+0\cdot\int_1^0 f(t^2)\,dt+\int_0^1 xf(x^2)\,dx=$$

$$\overset{\int_1^1 f(t^2)dt=0,\,0\cdot\int_1^0 f(t^2)dt=0}{=}\int_0^1 xf(x^2)\,dx=\int_0^1 x\cdot e^{x^2}dx=\ldots\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\Rightarrow E=\frac{e-1}{2}\,\tau.\mu.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΙΟΥΝΙΟΣ 2011

ΘΕΜΑ Α

Α1). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) = συνx είναι παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει (συνx)′ = –ημx. Μονάδες 10

Α2). Έστω μία συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ. Μονάδες 5

Α3). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α). Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = α + β\cdot i$, α, $β \in R$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\cdot β$.

β). Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x)\ f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

γ). Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1 – 1 στο διάστημα αυτό.

δ). Αν 0 και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και f(x) > 0 κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f\ x} = +\infty$.

ε). Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

Α1). Σχολικό βιβλίο σελίδα 225.

Α2). Σχολικό βιβλίο σελίδα 303.

Α3). (α)→ Λάθος (β). → Σωστό (γ). → Σωστό (δ). Σωστό (ε). Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις :

$|z - i| = 1 + Im(z)$ (1) $w\cdot(\bar{w} + 3\cdot i) = i\cdot(3\cdot \bar{w} + i)$ (2)

Β1). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}\cdot x^2$. Μονάδες 7

Β2). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0, 3) και ακτίνα $ρ = 2\cdot\sqrt{2}$. Μονάδες 7

Β3). Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z = w. Μονάδες 5

Β4). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ. έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ,Α,Λ,Β να είναι τετράγωνο. Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

Β1). Έστω $z = x + y\cdot i$, με $x, y \in R$.

$|z - i| = 1 + Im(z) \Rightarrow |x + (y - 1)\cdot i| = 1 + y \Rightarrow \sqrt{x^2 + \ y-1\ ^2} = 1+y \Rightarrow x^2 + \ y-1\ ^2 = \ 1+y\ ^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2\cdot y + 1 = y^2 + 2\cdot y + 1 \Rightarrow x^2 = 4\cdot y \Rightarrow y = \frac{1}{4}\cdot x^2$.

Β2). $w\cdot(\bar{w} + 3\cdot i) = i\cdot(3\cdot \bar{w} + i) \Rightarrow w\cdot \bar{w} + 3\cdot w\cdot i = 3\cdot \bar{w}\cdot i - 1 \Rightarrow |w|^2 + 3\cdot(w - \bar{w})\cdot i + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 3\cdot 2\cdot i^2\cdot y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6\cdot y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 8$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο Κ(0, 3) και ακτίνα $ρ = \sqrt{8}$.

Β3). Αναζητούμε τα κοινά σημεία των δύο γεωμετρικών τόπων :

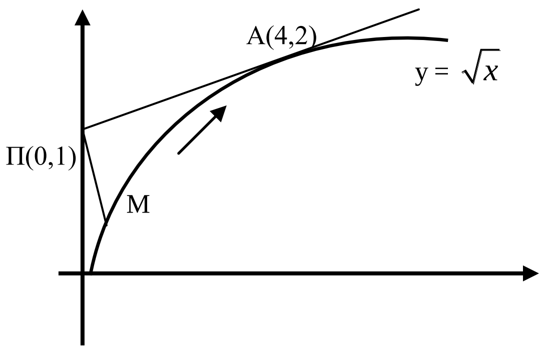
$$\begin{cases} x^2 = 4y & (1) \\ x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow 4\cdot y + y^2 - 6\cdot y + 1 = 0 \Rightarrow y^2 - 2\cdot y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$.
(1) $\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Άρα Α(2, 1) και Β(−2, 1).

Β4). $(ΚΑ) = (ΚΒ) = \rho = 2\cdot\sqrt{2} \rightarrow$ ΚΑΒ ισοσκελές.
$(ΑΒ)^2 = \sqrt{(2+2)^2 + (1-1)^2} = 16$
$(ΚΑ)^2 + (ΚΒ)^2 = 8 + 8 = 16$, άρα ισχύει $(ΑΒ)^2 = (ΚΑ)^2 + (ΚΒ)^2 \Rightarrow$ ΚΑΒ ορθογώνιο τρίγωνο.
Μ μέσο του ΑΒ $\rightarrow$ Μ(0, 1).
Μ μέσο του ΚΛ $\rightarrow$ Λ(0, −1) $\rightarrow u = -i$.

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0, 1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.
Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, t ≥ 0 είναι x(t) = 16·t m/min.



Γ1). Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, t ≥ 0 δίνεται από τον τύπο: x(t) = 16·t. Μονάδες 5
Γ2). Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4, 2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή. Μονάδες 6
Γ3). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α. Μονάδες 6
Γ4). Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, 1/4)$, κατά την οποία η απόσταση d = (ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη. Μονάδες 8
Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

ΛΥΣΗ

Γ1). $x'(t) = 16 \Rightarrow x(t) = (16\cdot t)'$, t ≥ 0. Από τις συνέπειες Θ.Μ.Τ. $x(t) = 16\cdot t + c$, t ≥ 0.
Για x = 0, είναι $x(0) = 0 \Rightarrow c = 0$, άρα $x(t) = 16\cdot t$, t ≥ 0.

Γ2). Παρατήρηση : έπρεπε να εξηγηθεί γιατί ο παρατηρητής χάνει οπτική επαφή με το κινητό Α.
Έστω $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ με $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.
Αναζητούμε την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από το σημείο Π(0, 1).
(ε) : $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Rightarrow y - \sqrt{x_0} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot(x - x_0)$.

$Π \in C_f \Rightarrow 1 - \sqrt{x_0} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot(-x_0) \Rightarrow 2\cdot\sqrt{x_0} - 2\cdot x_0 = -x_0 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{x_0} = x_0 \Rightarrow 4\cdot x_0^2 = x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ { $x_0 = 0$ απορρίπτεται ή $x_0 = 4$ }.

Για $x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 2 \rightarrow$ A(4, 2).

$x(t_0) = 4 \Rightarrow 16\cdot t_0 = 4 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{4}$ min ή t = 15 sec. Άρα η οπτική επαφή διαρκεί 15 sec.

Γ3). 1^{ος} τρόπος

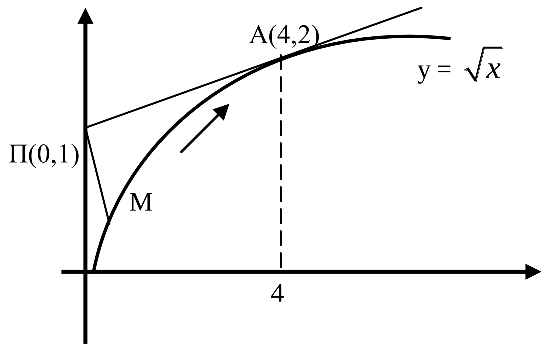
Η εφαπτόμενη της C_f στο A(4, 2) είναι η

(ε) : $y = \frac{1}{4}\cdot x + 1$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = \int_0^4 \left(\frac{1}{4}\cdot x + 1 - \sqrt{x}\right)\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 + \left[x\right]_0^4 - \frac{2}{3}\cdot\left[x\cdot\sqrt{x}\right]_0^4 =$$



$$= 2 + 4 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}\ m^2.$$

2^{ος} τρόπος

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = (ΟΠΑΒ) - \int_0^4 \sqrt{x}\cdot dx = \frac{ΟΠ + ΑΒ}{2}\cdot ΟΒ - \frac{2}{3}\cdot\left[x\cdot\sqrt{x}\right]_0^4 = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}\ m^2.$$

Γ4). $M(x, y) \rightarrow M(x, \sqrt{x}) \rightarrow M(16\cdot t, 4\cdot\sqrt{t})$.

$$d(t) = (ΠΜ) = \sqrt{(16\cdot t - 0)^2 + (4\cdot\sqrt{t} - 1)^2} = \sqrt{256\cdot t^2 + 16\cdot t - 8\cdot\sqrt{t} + 1}.$$

$$d'(t) = \left(\sqrt{256\cdot t^2 + 16\cdot t - 8\cdot\sqrt{t} + 1}\right)' = \frac{256\cdot t + 8\cdot t - \frac{2}{\sqrt{t}}}{\sqrt{256\cdot t^2 + 16\cdot t - 8\cdot\sqrt{t} + 1}}.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση g, με $g(t) = 256\cdot t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}$, t > 0.

$g'(t) = 256\cdot t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}} > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

1^{ος} τρόπος

$\rightarrow$ Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{64}, \frac{1}{4}\right]$ ως πράξεις συνεχών.

$\rightarrow g\left(\frac{1}{64}\right) = 4 + 8 - 16 = -4 < 0$.

$\rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68 > 0$.

Από το θεώρημα Bolzano η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα t_0 στο $\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{4}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και επειδή η g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

2^{ος} τρόπος

→ Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ = $\left(0, \frac{1}{4}\right]$.

→ $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(256\cdot t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}\right) = -\infty$.

→ g$\left(\frac{1}{4}\right)$ = 64 + 8 – 4 = 68. Άρα g(Δ) = (–∞, 68].

Είναι 0 ∈ (–∞, 68] , άρα η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

$d'(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow g(x) > g(t_0) \Rightarrow x > t_0$. (επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα).

x	0	t0	+∞
d ′(x)	–		+
d(x)	↘		↗

Η d είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, t_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[t_0, +\infty)$.

Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f : R → R, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε :

i). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$.

ii). f ′(0) < f(1) – f(0) και

iii).f ′′(x) ≠ 0, για κάθε x ∈ R.

Δ1). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$. Μονάδες 3

Δ2). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R. Μονάδες 5

Αν επιπλέον g(x) = f(x) – x, x ∈ R, τότε :

Δ3). Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x\cdot g(x)}$. Μονάδες 6

Δ4). Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)\cdot dx > 2$. Μονάδες 5

Δ5). Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα x′x και τις ευθείες με εξισώσεις x = 0 και x = 1 είναι E(Ω) = e – 25, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)\cdot dx$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (1, 2) τέτοιο, ώστε $\int_0^{\xi} f(t)\cdot dt = 2$. Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

Δ1). Η f συνεχής, άρα f(0) = $\lim\limits_{x\to 0}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot\frac{f(x)}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ = 0·[1 + f(0)] = 0.

f ′(0) = $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1 + f(0) = 1$.

(ε) : $y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \Rightarrow$ (ε) : $y = x$.

Δ2). Θ.Μ.Τ. με την συνάρτηση f στο διάστημα [0, 1].

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1-0} \Rightarrow f'(\xi) = f(1) - f(0)$ (1)

Είναι $f'(0) < f(1) - f(0) \Rightarrow f'(0) < f'(\xi)$ (2)
Επίσης $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$ και επειδή η f'' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, από συνέπειες του Θ. Bolzano η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

1ος τρόπος : Η f' είναι γνησίως μονότονη στο R, είναι $0 < \xi$ και $f'(0) < f'(\xi)$ από (2)
Επομένως η f' είναι γνησίως μονότονη στο R.

2ος τρόπος : Θ.Μ.Τ. με την συνάρτηση f' στο διάστημα $[0, \xi]$. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0, \xi)$
Τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = \dfrac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} > 0$ από (2)

Επομένως είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in R$. άρα η f είναι κυρτή στο R.

Δ3). Είναι $g(x) = f(x) - x$, $x \in R$. $g'(x) = f'(x) - 1$, $x \in R$.
$g'(x) > 0 \Rightarrow f'(x) - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(0)$
και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα $x > 0$.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο την τιμή $g(0) = f(0) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x\cdot g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{g(x)}\right] = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, με $g(x) \leq 0$.

Δ4). Είναι $g(x) \geq 0$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα

$$\int_0^2 g(x)\cdot dx > 0 \Rightarrow \int_0^2 \big(f(x) - x\big)\cdot dx > 0 \Rightarrow \int_0^2 f(x)\cdot dx - \int_0^2 x\cdot dx > 0 \Rightarrow \int_0^2 f(x)\cdot dx \geq \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)\cdot dx > 2.$$

Δ5). Είναι $g(x) \geq 0$, άρα Ε = $\displaystyle\int_0^1 g(x)\cdot dx = e - \frac{5}{2} \Rightarrow \int_0^1 \big(f(x) - x\big)\cdot dx = e - \frac{5}{2} \Rightarrow$

$$\int_0^1 f(x)\cdot dx - \int_0^1 x\cdot dx = e - \frac{5}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\cdot dx - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\cdot dx = e - 2.$$

Θεωρούμε συνάρτηση h, με h(x) = $\displaystyle\int_0^x f(t)\cdot dt - 2$, $x \in [1, 2]$.

→ Η h είναι συνεχής στο [1, 2] ως πράξεις συνεχών.

→ h(1) = $\displaystyle\int_0^1 f(t)\cdot dt - 2 = e - 2 - 2 = e - 4 < 0$.

h(2) = $\int_0^2 f(t)\cdot dt - 2 > 0$, από Δ2.

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ $\in$ (1, 2) τέτοιο ώστε h(ξ) = 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^{\xi} f(t)\cdot dt = 2$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 28 ΜΑΪΟΥ 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1). Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$, σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
Μονάδες 7

Α2). Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] ; Μονάδες 4

Α3). Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο ; Μονάδες 4

Α4). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α). Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β). Μια συνάρτηση f είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

γ). Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

δ). $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in R - \{x / \eta\mu x = 0\}$.

ε). $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)\cdot dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_\alpha^\nu + \int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g(x)\cdot dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β].
Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

Α1). Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε : $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\cdot(x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 \geq 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α2). Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$

Α3). Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

Α4). α → Σ β → Σ γ → Λ δ → Λ ε → Λ

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις :

$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$ (1)

$|w - 5\cdot\overline{w}| = 12$ (2)

Β1). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1. Μονάδες 6

Β2). Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$. Μονάδες 7

Β3). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη, με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$. Μονάδες 6

Β4). Για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1 \le |z - w| \le 4$. Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

Β1). $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Rightarrow (z-1)\cdot(\overline{z}-1) + (z+1)\cdot(\overline{z}+1) = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow z\cdot\overline{z} - z - \overline{z} + 1 + z\cdot\overline{z} + z + \overline{z} + 1 = 4 \Rightarrow 2\cdot z\cdot\overline{z} + 2 = 4 \Rightarrow 2\cdot z\cdot\overline{z} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z\cdot\overline{z} = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1.$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων O(0, 0) και ακτίνα ρ = 1.

Β2). <u>Τρόπος 1</u>

$|z_1| = |z_2| = 1$, αφού z_1, z_2 οι εικόνες τους ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο.

$|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)\cdot(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = 2 \Leftrightarrow$ 3μ

$z_1\cdot\overline{z_1} - z_1\cdot\overline{z_2} - z_2\cdot\overline{z_1} + z_2\cdot\overline{z_2} = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 - z_1\cdot\overline{z_2} - z_2\cdot\overline{z_1} + |z_2|^2 = 2$

$1 - z_1\cdot\overline{z_2} - z_2\cdot\overline{z_1} + 1 = 2 \Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_1} = 0.$.

Οπότε : $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\cdot(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)\cdot(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\cdot\overline{z_1} + z_2\cdot\overline{z_1} + z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_2} =$

$= |z_1|^2 + 0 + |z|^2 = 1 + 1 = 2.$

Άρα $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

<u>Τρόπος 2</u>

Αποδεικνύω την άσκηση του βιβλίου $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\cdot|z_1|^2 + 2\cdot|z_2|^2$.

Δηλαδή, $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = (z_1 - z_2)\cdot(\overline{z_1 - z_2}) + (z_1 + z_2)\cdot(\overline{z_1 + z_2}) =$

$= (z_1 - z_2)\cdot(\overline{z_1} - \overline{z_2}) + (z_1 + z_2)\cdot(\overline{z_1} + \overline{z_2}) =$

$= z_1\cdot\overline{z_1} - z_1\cdot\overline{z_2} - z_2\cdot\overline{z_1} + z_2\cdot\overline{z_2} + z_1\cdot\overline{z_1} + z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_1} + z_2\cdot\overline{z_2} =$

$= 2\cdot z_1\cdot\overline{z_1} + 2\cdot z_2\cdot\overline{z_2} = 2\cdot|z_1|^2 + 2\cdot|z_2|^2.$

Οπότε : $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\cdot|z_1|^2 + 2\cdot|z_2|^2 \Rightarrow \sqrt{2}^{\,2} + |z_1 + z_2|^2 = 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\cdot 1 + 2\cdot 1 \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = 2 + 2 - 2 \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = 2 \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

Β3). $|w - 5\cdot\overline{w}| = 12 \Rightarrow |w - 5\cdot\overline{w}|^2 = 12^2 \Rightarrow (w - 5\cdot\overline{w})\cdot(\overline{w - 5\cdot\overline{w}}) = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow (w - 5\cdot\overline{w})\cdot(\overline{w} - 5\cdot w) = 144 \Rightarrow w\cdot\overline{w} - 5\cdot w^2 - 5\cdot\overline{w}^2 + 25\cdot w\cdot\overline{w} = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow 26\cdot|w|^2 - 5\cdot\omega^2 - 5\cdot\overline{w}^2 = 144$ (Θέτουμε $z = x + y\cdot i$, με $x, y \in R$)

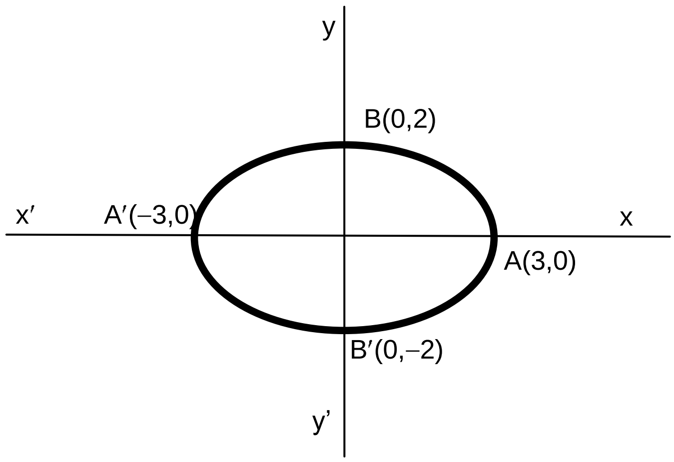
$\Rightarrow 26\cdot(x^2 + y^2) - 5\cdot(x + y\cdot i)^2 - 5\cdot(x - y\cdot i)^2 = 144$

$\Rightarrow 26\cdot x^2 + 26\cdot y^2 - 5\cdot(x^2 + 2\cdot x\cdot y\cdot i - y^2) - 5\cdot(x^2 - 2\cdot x\cdot y\cdot i - y^2) = 144$
$\Rightarrow 26\cdot x^2 + 26\cdot y^2 - 5\cdot x^2 - 10\cdot x\cdot y\cdot i + 5\cdot y^2 - 5\cdot x^2 + 10\cdot x\cdot y\cdot i + 5\cdot y^2 = 144$
$\Rightarrow 26\cdot x^2 + 26\cdot y^2 - 10\cdot x^2 + 10\cdot y^2 = 144 \Rightarrow 16\cdot x^2 + 36\cdot y^2 = 144 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{16\cdot x^2}{144} + \dfrac{36\cdot y^2}{144} = \dfrac{144}{144} \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1.$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

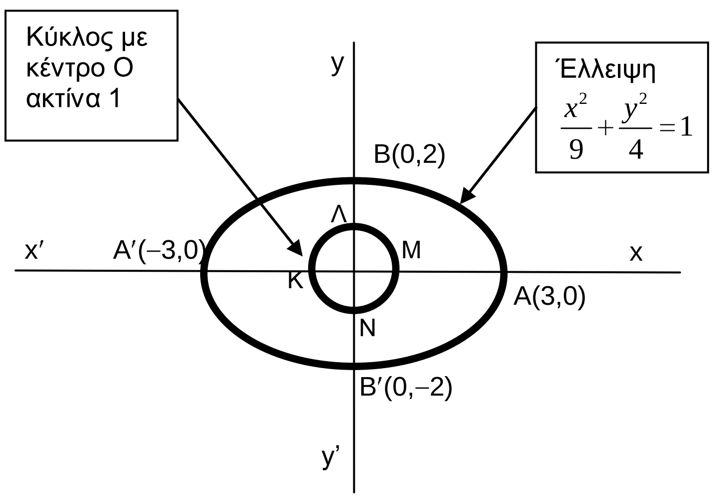
Τρόπος 1 Γεωμετρικά

Η έλλειψη έχει α = 3 , β = 2 ,
$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 9 - 4 = 5$, άρα $\gamma = \sqrt{5}$.
Οπότε η μέγιστη τιμή του $|w|$ (δηλαδή της απόστασης των εικόνων του w από την αρχή των αξόνων) είναι $\max|w| = 3$
και η ελάχιστη τιμή του $|w|$ (δηλαδή της απόστασης των εικόνων του w από την αρχή των αξόνων) είναι $\min|w| = 2$



Τρόπος 2 Γεωμετρικά $2 \le OM \le 3$
Μ η εικόνα των μιγαδικών w οπότε $2 \le OM \le 3$.
Άρα $2 \le |w| \le 3$, επομένως $|w|_{min} = 2$, $|w|_{max} = 3$.

Β4). Τρόπος 1 Γεωμετρικά



Κ(−1, 0) , Λ(0, 1) , Μ(0, −1) , Ν(0, −1)
4μ
Οπότε η απόσταση των εικόνων των z από τους w η μέγιστη θα είναι η ΚΑ ή η ΜΑ′ $|z - w|_{max} = 4$. 1μ
Ενώ η ελάχιστη θα είναι η ΑΒ ή ΝΒ $|z - w|_{min} = 1$.

Τρόπος 2 $|z - w| \le |z| + |w|$
$|z| = 1$ και $|w|_{max} = 3$.
Άρα $|z - w| \le 1 + 3 \Leftrightarrow |z - w|_{max} \le 4$.
$||z| - |w|| \le |z - w|$, αλλά $|z| = 1$
Και $|w|_{min} = 2$, άρα $2 - 1 \le ||z| - |w|| \le |z - w|$ δηλαδή

$1 \le ||w| - 1| \le |z - w|$ άρα $|z - w| \ge 1$.
Οπότε $1 \le |z - w| \le 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)\cdot\ln x - 1$, $x > 0$.
Γ1). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f
Μονάδες 6
Γ2). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες. Μονάδες 6
Γ3). Αν x_1, x_2, με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$. Μονάδες 6
Γ4). Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$. Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

Γ1). $f(x) = (x - 1)\cdot\ln x - 1$, $x > 0$. Η f είναι συνεχής ως πράξεις με τις $x - 1$, συνεχής ως πολυωνυμική $\ln x$, συνεχής ως λογαριθμική $- 1$, συνεχής ως σταθερά.
Η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = [(x - 1)\cdot\ln x - 1]' = [(x - 1)\cdot\ln x]' - (1)' = (x - 1)'\cdot\ln x + (x - 1)\cdot(\ln x)' =$
$\ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$. Η f' είναι συνεχής ως πράξεις με τις $-\frac{1}{x}$, συνεχής ως ρητή $\ln x$, συνεχής ως λογαριθμική 1 , συνεχής ως σταθερά.
Η f' παραγωγίσιμη με $f''(x) = [\ln x + 1 - \frac{1}{x}]' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, αφού $x > 0$.

x	0 1	$+\infty$
$f''(x)$	+	+
$f'(x)$	– ↗	+ ↗

Προφανώς ρίζα της $f'(x)$ το 1, άρα και μοναδική αφού $f'(x)$ δεν είναι αύξουσα,

→ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [(x - 1)\cdot\ln x - 1] = (0- 1)\cdot(-\infty) - 1 = + \infty$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
→ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} ((x - 1)\cdot\ln x - 1) = (+\infty - 1)\cdot(+\infty) - 1 = +\infty$. $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.
→ $f(1) = (1 - 1)\cdot\ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1$.
Η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων $(x - 1)$, συνεχής ως πολυωνυμική $\ln x$, συνεχής ως λογαριθμική $- 1$, συνεχής ως σταθερή.
Για $x \in (0, 1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα $f(A_1) = [-1, +\infty)$.
Για $x \in [1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα $f(A_2) = [-1, +\infty)$.
Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(A) = [-1, +\infty)$.

Γ2). $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$. $\ln x^{x-1} = \ln e^{2013} \Rightarrow (x-1)\cdot\ln x = 2013\cdot\ln e \Rightarrow (x - 1)\cdot\ln x = 2013 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 1)\cdot\ln x - 1 = 2013 - 1 \Rightarrow f(x) = 2012$.
→ Για $x \in (\alpha, 1]$ $f(A_1) = [-1, +\infty)$, το $2012 \in f(A_1)$.
Η f είναι συνεχής ορίζεται $x \in \Delta_1 \subseteq (0, 1]$.
Και $2012 \in f(\Delta_1) \subseteq f(A_1)$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in \Delta_1$, άρα $x_1 \in (0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 2012$, είναι μοναδικό διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και x_1 θετικό.
→ Για $x \in [1, +\infty)$ $f(A_2) = [-1, +\infty)$, το $2012 \in f(A_2)$.
Η f είναι συνεχής ορίζουμε $x \in \Delta_2 \subseteq [1, +\infty)$.
Και $2012 \in f(A_2) \subseteq f(A_2)$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει ένα

τουλάχιστον $x_2 \in \Delta_2$, άρα $x_2 \in [1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 2012$, είναι μοναδικό διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και x_2 θετικό.
άρα η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2012}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες,

Γ3).Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = f'(x) + f(x) - 2012$.
→ Η g συνεχής ως πράξεις συνεχών στο $[x_1, x_2]$ αφού $f'(x_1)$, $f(x)$ συνεχής και -2012 συνεχής ως σταθερή
→ $g(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012 = f'(x_1) < 0$, αφού $f(x_1) = 2012$ και $x_1 \in (0,1)$
$g(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012 = f'(x_2) > 0$, αφού $f(x_2) = 2012$ και $x_2 \in (1, +\infty)$.
άρα $g(x_1)\cdot g(x_2) < 0$, άρα κατά Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.
δηλαδή $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$.

Γ4). $g(x) = f(x) + 1 = (x-1)\cdot\ln x - 1 + 1 \Rightarrow g(x) = (x-1)\cdot\ln x$, $x > 0$
→ $g(x) = 0$ για $x = 1$
→ Η g στο $[1, e]$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών και $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [1, e]$.
Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = \int_1^e \left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)' \cdot \ln x \cdot dx = \left[\frac{(x-1)^2}{2}\cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{(x-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx =$$

$$= \frac{(e-1)^2}{2}\cdot \ln e - \frac{(1-1)^2}{2}\cdot \ln 1 - \int_1^e \frac{(x-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx$$

$$= \frac{(e-1)^2}{2} - \int_1^e \frac{x^2-2x+1}{2x}\cdot dx = \frac{(e-1)^2}{2} - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{2x}\right)\cdot dx =$$

$$= \frac{(e-1)^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} - x + \frac{1}{2}\ln x\right]_1^e = \frac{e^2-2e+1}{2} - \frac{e^2}{4} + e - \frac{1}{2}\ln e + \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2}\cdot \ln 1 =$$

$$= \frac{e^2-2e+1}{2} - \frac{e^2}{4} + e - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2e^2-4e+2-e^2+4\cdot e-2-3}{4} = \frac{e^2-3}{4} \text{ τ,μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f : (0, +∞) → R, η οποία για κάθε x > 0 ικανοποιεί τις σχέσεις :

→ f(x) ≠ 0.

→ $\int_0^{x^2-x+1} f\ \ t\ \cdot dt \ge \frac{x-x^2}{e}$.

→ lnx − x = $-\left(\int_0^x \frac{\ln t - t}{f\ \ t}\cdot dt + e\right)\cdot$ | f(x) | .

Δ1). Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της. Μονάδες 10

Αν είναι f(x) = e^{-x}·(lnx − x), x > 0, τότε :.

Δ2). Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x\to 0^+}\left[\ f\ \ x\ ^2\cdot \eta\mu\frac{1}{f\ \ x} - f\ \ x\ \right]$. Μονάδες 5

Δ3). Με τη βοήθεια της ανισότητας lnx ≤ x − 1, που ισχύει για κάθε x>0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F(x) = $\int_\alpha^x f\ \ t\ \cdot dt$, x > 0, όπου α > 0, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι : F(x) + F(3x) > 2·F(2x), για κάθε x > 0 (μονάδες 4). Μονάδες 6

Δ4). Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός β > 0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ ∈ (β, 2·β) τέτοιο ώστε : F(β) + F(3·β) = 2·F(ξ). Μονάδες 4

ΛΥΣΗ

Δ1). → Η f συνεχής , x ∈ (0, +∞). f(x) ≠ 0, άρα κατά Bolzano διατηρεί σταθερό πρόσημο.

→ Ισχύει : $\int_1^{x^2-x+1} f\ \ t\ \cdot dt \ge \frac{x^2-x}{e} \Leftrightarrow \int_1^{x^2-x+1} f\ \ t\ \cdot dt - \frac{x^2-x}{e} \ge 0$

Θεωρούμε G(x) = $\int_1^{x^2-x+1} f\ \ t\ \cdot dt - \frac{x^2-x}{e} \ge 0$, x > 0.

Η f συνεχής άρα η $\int_1^{x^2-x+1} f\ \ t\ \cdot dt$, παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς f.

Η $\frac{x^2-x}{e}$ παραγωγίαιμη ως πολυωνυμική, άρα η G παραγωγίσιμη ως αφαίρεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. και για x = 1, G(1) = 0 έχουμε ότι G(x) ≥ G(1) ισχύει 1 εσωτερικό σημείο του D_G αφού x > 0, άρα κατά Fermat G ′(1) = 0

G ′(x) = f(x^2 − x + 1)·(2·x − 1) − $\frac{1-2\cdot x}{e}$. Άρα G ′(1) = f(1) ·(2 − 1) − $\frac{1-2}{e}$ = 0 ;

f(1) = − $\frac{1}{e}$ και επειδή η f διατηρεί σταθερό πρόσημο άρα f(x) < 0.

→ έχουμε lnx −x = − $\left(\int_0^x \frac{t-\ln t}{f\ \ t}\cdot dt + e\right)\cdot\ -f\ \ x$, με f(x) < 0 και x > 0.

$$\frac{\ln x - x}{f\ \ x} = \int_0^x \frac{t-\ln t}{f\ \ t}\cdot dt + e \ne 0$$

Η συνάρτηση $\frac{\ln x - x}{f\ \ x}$, συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξη των συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων x , lnx, f(x), άρα συνεχής και παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $\int_0^x \frac{t-\ln t}{f(t)}\cdot dt + e$.

$$\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_0^x \frac{t-\ln t}{f(t)}\cdot dt + e \Rightarrow \left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)}$$ (από εφαρμογή βιβλίου)

$$\frac{\ln x - x}{f(x)} = c\cdot e^x$$

Για x = 1, $\frac{\ln 1 - 1}{f(1)} = c\cdot e^1$, άρα $\frac{-1}{\frac{-1}{e}} = c\cdot e \Leftrightarrow$ c = $\frac{e}{e}$ = 1.

Άρα $\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow$ f(x) = $\frac{\ln x - x}{e^x}$. Άρα f(x) = $e^{-x}\cdot(\ln x - x)$, x > 0

Τρόπος 2

Θέτω g(x) = $\frac{\ln x - x}{f(x)}$, η g συνεχής και παραγωγίσιμη. $g'(x) = g(x) \Rightarrow g'(x) - g(x) = 0$

$\Rightarrow e^{-x}\cdot g'(x) - e^{-x}\cdot g(x) = 0 \Rightarrow [e^{-x}\cdot g(x)]' = 0$, άρα $g(x)\cdot e^{-x} = c$.

Για x = 1 , $g(1)\cdot e^{-1} = c$, g(1) = $\frac{\ln 1 - 1}{f(1)} = \frac{-1}{\frac{-1}{e}} = e$

Άρα $e\cdot e^{-1} = c \Rightarrow c = 1$. Οπότε $e^{-x}\cdot g(x) = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{e^{-x}} \Rightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x\cdot x(x) = \ln x - x$, x > 0 $\Rightarrow$ f(x) = $\frac{\ln x - x}{e^x}$, x > 0.

Δ2). L = $\lim_{x\to 0^+}\left[f(x)^2 \cdot \eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [e^{-x}\cdot(\ln x - x)] = 1\cdot(-\infty - \infty) = -\infty$. $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$,

Θέτουμε $\frac{1}{f(x)} = \omega$, ω → 0 , f(x) = $\frac{1}{\omega}$

Οπότε : L = $\lim_{\omega\to 0^-}\left(\frac{1}{\omega^2}\cdot\eta\mu\omega - \frac{1}{\omega}\right) = \lim_{\omega\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu\omega - \omega}{\omega^2}\right) \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{\omega\to 0^-}\frac{(\eta\mu\omega - \omega)'}{(\omega^2)'} =$

$= \lim_{\omega\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu\omega - 1}{2\omega} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$

ή $\frac{1}{2}\cdot\lim_{\omega\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\omega - 1}{\omega} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{\omega\to 0}\frac{(\sigma\upsilon\nu\omega - 1)'}{(\omega)'} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{\omega\to 0}\frac{-\eta\mu\omega}{1} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$.

Δ3). $\ln x \le x - 1$, x > 0. F(x) = $\int_\alpha^x f(t)\cdot dt$, x > 0, α > 0.

Η F είναι παραγωγίαιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης f.

$F'(x) = \left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\cdot dt\right)' = f(x) = e^{-x}\cdot(\ln x - x)$, $x > 0$

$F''(x) = f'(x) = -e^{-x}\cdot(\ln x - x) + e^{-x}\cdot\left(\frac{1}{x} - 1\right) = e^{-x}\cdot\left(\frac{1}{x} - 1 - \ln x - x\right)$

$\ln x \le x - 1 \Rightarrow x - 1 - \ln x \ge 0$, $\frac{1}{x} > 0$, $x > 0$

Άρα $F''(x) > 0$, άρα $F(x)$ κυρτή $x > 0$

Δημιουργούμε διαστήματα $[x, 2\cdot x]$ και $[2\cdot x, 3\cdot x]$ με $x > 0$

→ Η F είναι συνεχής σε κάθε διάστημα ως παραγωγίσιμη

→ Κατά Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x, 2\cdot x)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (2\cdot x, 3\cdot x)$ ώστε

$F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} \Rightarrow F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} \Rightarrow F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} \Rightarrow$

$\Rightarrow F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} \Rightarrow f(\xi_1) = \frac{F(2\cdot x) - F(x)}{x} \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{F(3\cdot x) - F(2\cdot x)}{x}$

όμως $F''(x) = f'(x) > 0$.

Άρα $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα

Άρα $\xi_1 < \xi_2$, άρα $f(\xi_1) < f(\xi_2)$

Άρα $\frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$, $x > 0$

$F(2\cdot x) + F(2\cdot x) < F(3\cdot x) + F(x)$

Δ4). Θεωρούμε την συνάρτηση $H(x) = F(\beta) + F(3\cdot\beta) - 2\cdot F(x)$

Η συνάρτηση H είναι συνεχής ως για $x > 0$.

Η $F(\beta) + F(3\cdot\beta)$ συνεχής ως σταθερή

Η $F(x)$ συνεχής ως παραγωγίσιμη, άρα $F(x)$ συνεχή στο $[\beta, 2\cdot\beta]$, αφού $\beta > 0$.

→ $H(\beta) = F(\beta) + F(3\cdot\beta) - 2\cdot F(\beta)$

$H(\beta) = F(3\cdot\beta) - F(\beta)$.

$F'(x) = e^{-x}\cdot(\ln x - x)$ $\quad\quad$ $e^{-x} > 0$, $\ln x \le x - 1 \le x$

$F'(x) < 0$

Άρα $F(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα με $x > 0$, άρα και στο $[\beta, 2\cdot\beta]$

→ $H(2\cdot\beta) = F(\beta) + F(3\cdot\beta) - 2\cdot F(2\cdot\beta) > 0$

$H(2\cdot\beta) > 0$ σύμφωνα με $F(x) + F(3\cdot x) > 2\cdot F(2\cdot x)$, $x > 0$

Οπότε $H(\beta)\cdot H(2\cdot\beta) < 0$

Άρα κατά Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\beta, 2\cdot\beta)$ τέτοιο ώστε $H(\xi) = 0$ δηλ.

$F(\beta) + F(3\cdot\beta) - 2\cdot F(\xi) = 0$

$F(\beta) + F(3\cdot\beta) = 2\cdot F(\xi)$.

η $H'(x) = -2\cdot F(x)$ (επειδή η F είναι παραγωγίσιμη) και $F'(x) < 0$

η $H'(x) > 0$ άρα το ξ είναι μοναδικό.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1). Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, β)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. Μονάδες 7

Α2). Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες ; Μονάδες 2

Α3). Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle. Μονάδες 6

Α4). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x′x, της γραφικής παράστασης της f

β). Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $α + β\cdot i$ και $γ + δ\cdot i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ). Αν είναι $0 < α < 1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} α^x = +\infty$.

δ). Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ε). Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_α^β f(t)\cdot dt = G(α) - G(β)$. Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

Α1). θεωρία ,θεώρημα σελ. 262

Α2). Ορισμός σελ 141

Α3). Διατύπωση θεωρήματος σελ.246

Α4). (α) $\to$ Σ, (β) $\to$ Σ , (γ) $\to$ Λ, (δ) $\to$ Σ, (ε) $\to$ Λ

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$, είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι :

Β1). $|z| = 1$. Μονάδες 7

Β2). Ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός. Μονάδες 6

Β3). $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\cdot(z_1 + z_2) \leq 4$, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z.

Μονάδες 6

Β4). Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u - u\cdot i = \frac{i}{w} - w$, $w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

Β1). Αφού w είναι φανταστικός αριθμός $\overline{w} = -w$ και μετά τις πράξεις θα έχουμε $z \cdot \overline{z} = 1$ άρα $|z| = 1$.

Β2). Για να δείξουμε ότι ο αριθμός $u = \left(z - \dfrac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός θα πρέπει να δείξουμε ότι $\overline{u} = u$ που είναι εύκολο να δειχθεί αφού ισχύει $z \cdot \overline{z} = 1$ και άρα $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

Β3). Η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με $(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \cdot (z_1 + z_2) \le 4$ ή αν θέσουμε $w = z_1 + z_2$ η σχέση γίνεται $w \cdot \overline{w} \le 4$ ή $|w| \le 2$ δηλαδή ισοδύναμα $|z_1 + z_2| \le 2$ που ισχύει αφού λόγω της τριγωνικής ανισότητας θα έχουμε $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| = 1 + 1 = 2$.

Β4). Αφού ο w είναι φανταστικός αριθμός θα είναι της μορφής $w = \alpha \cdot i$ ($\alpha \in R$).

Θέτοντας $u = x + y \cdot i$ ($x, y \in R$) θα έχουμε μετά τις πράξεις $(x + y) + (y - x) \cdot i = \dfrac{1}{\alpha - \alpha \cdot i}$

και άρα $x + y = \dfrac{1}{\alpha}$ και $y - x = -\alpha$ ή $x - y = \alpha$ ($\alpha \neq 0$) και με απαλοιφή της παραμέτρου α θα έχουμε την ισοσκελή υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$, για την οποία ισχύει : $x \cdot f(x) + 1 = e^x$, για κάθε $x \in R$.

Γ1). Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Μονάδες 6

Γ2). Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της. Μονάδες 6

Γ3). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0,f(0)). Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2 \cdot f(x) = x + 2$, $x \in R$. έχει ακριβώς μία λύση. Μονάδες 8

Γ4). Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0^+} [x \cdot (\ln x) \cdot \ln(f(x))]$. Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

Γ1). Από την σχέση $x \cdot f(x) + 1 = e^x$, έχουμε $f(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$, αν $x \neq 0$ και για $x = 0$ αφού η f είναι συνεχής και στο 0 θα έχουμε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ και άρα με τον κανόνα του DLH καταλήγουμε στο $f(0) = 1$.

Γ2). Μπορούμε να δείξουμε το 1 – 1 αποδεικνύοντας ότι η f είναι γν. μονότονη.
Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) για $x \neq 0$ με $f'(x) = e^x \cdot (x - 1) + \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ τώρα θεωρώντας την $g(x) = e^x \cdot (x - 1) + 1$, $x \neq 0$, που είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) έχουμε ότι $g'(x) = x \cdot e^x$ και αν $x > 0$ τότε $g'(x) > 0$ και αν $x < 0$ τότε $g'(x) < 0$ και άρα η g έχει ελάχιστο στο $x = 0$, άρα $g(x) \ge g(0) = 0$ και τελικά $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γν. αύξουσα συνάρτηση και άρα 1–1 και συνεπώς ορίζεται η f^{-1}.
Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f : Έτσι αφού $Df = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$ θα έχουμε

$(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)]\cup(f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (0, 1]\cup(1, +\infty) = (0, +\infty)$. θα έχουμε $Df^{-1} = [0, +\infty)$.

Γ3). Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α(0, f(0)) είναι $y - 1 = f(0)\cdot x$ (1) προκύπτει από τον ορισμό με το όριο και μετά με τον κανόνα του DLH και είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ άρα η (1) γίνεται

$y - 1 = \frac{x}{2}$ ή $y = \frac{x}{2} + 1$, Αφού η f είναι κυρτή θα ισχύει $f(x) \geq y$, για x πραγματικό και άρα

$f(x) \geq \frac{x}{2} + 1$ (2)

Για να δειχθεί ότι η εξίσωση $2\cdot f(x) = x + 2$ έχει ακριβώς μια λύση πρέπει να δείξουμε ότι η $K(x) = 2\cdot f(x) - x - 2$ έχει ακριβώς μια λύση που όμως, λόγω της (2), είναι $K(x) \geq 0$ και το $K(x) = 0$ ισχύει μόνο για το σημείο επαφής δηλαδή το x = 0. Άρα έχει μοναδική ρίζα το 0 και για τα άλλα x $K(x) > 0$.

Γ4). $A = \lim_{x\to0^+} [x\cdot(\ln x)\cdot(f(x))]$ θα έχουμε με κανόνα του DLH . . . και άρα Α = 0 .0 = 0

(διότι ($\lim_{x\to0^+} f(x) = \ln f(0) = 0$ (f συνεχής)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : A \to R$ με $A = (0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν :

→ $f(A) = (-\infty, 0]$.

→ η παράγωγος της f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, και

→ $2\cdot f(x) + \left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot e^{f(x)} = \int_1^x e^{f\ x}\ f'\ t \cdot \left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot dt + 2$, για κάθε x > 0.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f\ t \cdot dt$, x > 0.

Δ1). Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$, x > 0. Μονάδες 8

Δ2). Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma(x_0, F(x_0))$, $x_0 > 0$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_0, \beta)$ με $\beta > x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο Μ(ξ, F(ξ)) να είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) : $F(\beta)\cdot x - (\beta - 1)\cdot y + 2012\cdot(\beta - 1) = 0$. Μονάδες 6

Δ3). Αν β > 1, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\left[F\ \beta\ + 1-\beta\ \cdot f\ \ \beta\ \right]\cdot x^5}{x-1} + \frac{\beta-1\ \cdot\ x+1\ ^3}{x-3} = 0$,

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x, στο διάστημα (1, 3). Μονάδες 5

Δ4). Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)\cdot dt \leq \int_1^x t\cdot f\ \ t\ \cdot dt$, για κάθε x > 0. Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

Δ1). Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης θα έχουμε (είναι παραγωγίσιμες αφού οι υπό ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι συνεχείς) :

$2\cdot e^{f(x)} = x + \frac{1}{x} + c$ και το c προσδιορίζετε από την δοθείσα σχέση για x = 1, που δίνει

$2\cdot f(1) + 2\cdot e^{f(1)} = 2$ ή $f(1) + e^{f(1)} = 1$. Τώρα

→ Αν $f(1) > 0$ τότε $1 - e^{f(1)} > 0$ και $e^{f(1)} < e^0$ άρα $f(1) < 0$ άτοπο

$\rightarrow$ Αν f(1) < 0 τότε $1 - e^{f(1)} < 0$ και $e^{f(1)} > e^0$ άρα f(1) > 0 άτοπο. Άρα f(1) = 0.

Τώρα για x = 1 έχουμε c = 0 και συνεπώς η συνάρτηση έχει τύπο f(x) = lnx2 + $\frac{1}{2}\cdot$x, για x > 0.

Δ2).Για να δείξουμε ότι η F έχει σημείο καμπής θα βρούμε την F ″(x). Η f είναι συνεχής για x > 0 άρα η F είναι παραγωγίσιμη για x > 0 με F ′(x) = f(x).Τώρα F ″(x) = f ′(x) = $\frac{1-x^2}{x\ \ x^2+1}$, x > 0.

Η f(x) = 0 δίνει λύση την x = 1 και άρα ο πίνακας μεταβολών της f δίνει :

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
F ″(x)	+	–
F(x)	Κοίλα κάτω	Κοίλα άνω

Άρα η F έχει μοναδικό σημείο καμπής το (1, F(1)) = (1, 0).
Για να είναι η εφαπτομένη της CF στο σημείο Μ(ξ, F(ξ)) παράλληλη προς την ευθεία (ε) : F(β)·x – (β – 1)·y + 2012·(β – 1) = 0 θα πρέπει F ′(ξ) = $\frac{f\ \ \beta}{\beta}$ – 1. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στο διάστημα [1, β] για τη συνάρτηση F (ισχύουν οι προϋποθέσεις που τις αναφέρουμε).
Το ξ είναι μοναδικό αφού η συνάρτηση F ′ είναι γν. αύξουσα λόγω του ότι η F είναι κοίλη στο [1, β].

Δ3). Θεωρούμε την συνάρτηση :
Η(x) = (x – 3)·[F(β) + (1 – β)·f(β)]·x^3 + (x – 1)·(β – 1)·$(x + 1)^2$ και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο [1, 3]. Η Η(x) είναι συνεχής στο [1, 3] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
$\rightarrow$ Η(1) = –2·[F(β) + (1 – β)·f(β)] < 0 αφού ξ < β και η F ′ είναι γν.φθίνουσα F ′(ξ) > F ′(β) που από το Δ2 έχουμε $\frac{F\ \ \beta}{\beta-1}$ > f(β) δηλ. [F(β) + (1 – β)·f(β)] > 0
Η(3) = 32·(β – 1) > 0.
Άρα υπάρχει ξ ∈ (1, 3) τέτοιο ώστε Η(ξ) = 0 που δίνει άμεσα το ζητούμενο.

Δ4). Για το ολοκλήρωμα του α μέλους κάνουμε την αντικατάσταση u = t/x και με αλλαγή των άκρων ολοκλήρωσης παίρνουμε : Για t = x, u = 1 και για t = x^2, u = x οπότε το ολοκλήρωμα του α μέλους x γίνεται : x·$\int_1^x f\ \ u\ \ \cdot du$ οπότε αρκεί να δείξουμε ότι x· ≤

Για το σκοό αυτό θεωρούμε την συνάρτηση Π(x) = x·$\int_1^x f\ \ u\ \ \cdot du \le \int_1^x u\cdot f\ \ u\ \ \cdot du$, x > 0 και Π(1) = 0
Η συνάρτηση Π(x) είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων επειδή η f(x) είναι συνεχής για x > 0 με Π ′(x) = $\int_1^x f\ \ u\ \ \cdot du$ = F(x), για x > 0. Επειδή $\frac{2x}{x^2+1}$ < 1 θα είναι $\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$ < 0 δηλαδή f(x) < 0.
Άρα για x > 1 : Π ′(x) < 0 και για 0 < x < 1 : Π′(x) > 0 και έτσι η Π(x) έχει μέγιστο στο 1 το Π(1) = 0. Άρα Π(x) ≥ Π(1) ή Π(x) ≥ 0 που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Επιμέλεια σημειώσεων : Πολυχρονιάδης Νικόλαος

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 27 ΜΑΪΟΥ 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1). Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι : $\int_\alpha^\beta f(t)\cdot dt$ = G (β) – G(α). Μονάδες 7

Α2). Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού(Θ.Μ.Τ.) Μονάδες 4

Α3). Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της; Μονάδες 4

Α4). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α). Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο Κ (z_o) και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β). Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) < 0$, τότε f (x) < 0 κοντά στο x_o

γ). Ισχύει ότι : $|\eta\mu x| \le |x|$, για κάθε $x \in R$.

δ). Ισχύει ότι : $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

ε). Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

Α1). Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 334-335

Α2). Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 246-247

Α3). Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 222

Α4). (α). Λάθος (β). Σωστό (γ). Σωστό (δ). Λάθος (ε). Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$.

Β1). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο Κ(2, 0) και ακτίνα ρ = 1. (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \le 3$. (μονάδες 3)

Μονάδες 8

Β2). Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta\cdot w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in R$, και $|Imz_1 - Imz_2| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι: β = − 4 και γ = 5 Μονάδες 9

Β3). Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_o , α_1 , α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β1. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση :
$v^3 + \alpha_2\cdot v^2 + \alpha_1\cdot v + \alpha_0 = 0$, τότε να αποδείξετε ότι : $|v| < 4$. Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

Β1). Είναι : $(z - 2)\cdot(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2 \Rightarrow |z - 2|^2 + |z - 2| - 2 = 0$ (1)

Θέτουμε $|z-2| = \rho > 0$, οπότε η (1) γράφεται : $\rho^2 + \rho - 2 = 0 \Rightarrow \rho = -2$ απορρίπτεται ή $\rho = 1$
Άρα $|z-2| = 1$ και ο γεωμετρικός τόπος των z είναι κύκλος με κέντρο K(2, 0) και ακτίνα $\rho = 1$.
Ισχύει : $|z| = |z-2+2| \le |z-2| + 2 = 3$.
Εναλλακτικά, ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο είναι ο $z = 3$ με $|z| = 3$.
Οπότε ισχύει : $|z| \le 3$.

Β2). Για τους z_1 z_2 που ανήκουν στον κύκλο και είναι συζυγείς ως ρίζες της εξίσωσης :
$w^2 + \beta\cdot w + \gamma = 0$ ισχύει : $|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)| = 2 \Rightarrow |\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(\bar{z_1})| = 2 \Rightarrow 2\cdot|\mathrm{Im}(z_1)| = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Ιπι$(z_1) = 1$ ή $\mathrm{Im}(z_1) = -1$
Οπότε θεωρούμε: $z_1 = 2 + i$, και $z_2 = \ = 2 - i$
Για την εξίσωση ισχύει : $\{z_1 + z_2 = -\beta$ και $z_1\cdot z_2 = \gamma\} \Rightarrow \{\beta = -4\ ,\ \gamma = 5\}$.

Β3). Ισχύει : $\nu^3 + \alpha_2\cdot\nu^2 + \alpha_1\cdot\nu + \alpha_0 = 0 \Rightarrow -\nu^3 = \alpha_2\cdot\nu^2 + \alpha_1\cdot\nu + \alpha_0$.
Οπότε : $|-\nu^3| = |\alpha_2\cdot\nu^2 + \alpha_1\cdot\nu + \alpha_0| \Rightarrow |\nu^3| = |\alpha_2|\cdot|\nu|^2 + |\alpha_1|\cdot|\nu| + |\alpha_0|$ (1)
Θέτω : $|\nu| = \rho > 0$, οπότε η σχέση (1) γίνεται : $\rho^3 < |\alpha_2|\cdot\rho^2 + |\alpha_1|\cdot\rho + |\alpha_0|$
Χρησιμοποιώντας ότι : $|\alpha_0| \le 3$, $|\alpha_1|| \le 3$, $|\alpha_2| \le 3$ παίρνουμε :
$\rho^3 < 3\cdot\rho^2 + 3\cdot\rho + 3 \Rightarrow \rho^3 - 3\cdot\rho^2 - 3\cdot\rho - 3 \le 0 < 1$
$\Rightarrow \rho^3 - 3\cdot\rho^2 - 3\cdot\rho - 4 < 0 \Rightarrow (\rho - 4)\cdot(\rho^2 + \rho + 1) < 0$, (με σχήμα Horner)
$\rho - 4 < 0$, αφού $\rho^2 + \rho + 1 > 0$, για κάθε $\rho > 0$
$\rho < 4$ ή $|\nu| < 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g :R $\to$ R, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:
- $(f(x) + x)\cdot(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in R$.
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \dfrac{3x^2}{2} - 1$

Γ1).. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $x \in R$ Μονάδες 9
Γ2). Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$. Μονάδες 8
Γ3). Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε :

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\cdot dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\cdot \varepsilon\varphi x_0$$ Μονάδες 8

ΛΥΣΗ
Γ1). Για κάθε $x \in R$ ισχύει : $(f(x) + x)\cdot(f'(x) + 1) = x \Rightarrow 2\cdot(f(x) + x)\cdot(f'(x) + 1) = 2\cdot x \Rightarrow$
$\Rightarrow [f(x) + x)^2]' = (x^2)'$.
Άρα υπάρχει αριθμός $c \in R$ ώστε : $[f(x) + x]^2 = x^2 + c$, για κάθε $x \in R$.
Για $x = 0$ προκύπτει $c = 1$.
Άρα ισχύει : $(f(x) + x)^2 = x^2 + 1$, για κάθε $x \in R$ (1)
Για τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x$, με $x \in R$ και επειδή : $x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in R$.
Ισχύει : $h(x) \ne 0$, για κάθε $x \in R$.
Η h είναι συνεχής στο R ως άθροισμα συνεχών, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.
Επειδή : $h(0) = h(0) = 1 > 0$, ισχύει : $h(x) > 0$, για κάθε $x \in R$ (2)
Η (1) γράφεται : $(h(x))^2 = x^2 + 1$, για κάθε $x \in R$.
και λόγω της σχέσης (2) παίρνουμε : $h(x) = \sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x \in R$.

f(x) + x = $\sqrt{x^2+1}$ $\Rightarrow$ f(x) = $\sqrt{x^2+1}$ − x, για κάθε x $\in$ R.

Γ2). Η f είναι παραγωγίσιμη με : f ′(x) = $\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ < 0,

γιατί : $\sqrt{x^2+1} - x$ > $\sqrt{x^2}$ − x = |x| − x ≥ 0, για κάθε x $\in$ R.

Διαφορετικά, λύνουμε την ανίσωση : f ′(x) < 0 $\Rightarrow$ x − $\sqrt{x^2+1}$ < 0 $\Rightarrow$ > $\sqrt{x^2+1}$ > x

αν x ≥ 0, τότε : $x^2 + 1 > x^2$ που ισχύει

αν x < 0 προφανώς ισχύει.

Άρα : f ′(x) < 0, για κάθε x $\in$ R Επίσης προκύπτει : f(x) > 0, για κάθε x $\in$ R.

Για την εξίσωση, έχουμε : f(g(x)) = 1 $\Rightarrow$ f(g(x)) = f(0) $\Rightarrow$ g(x) = 0 (3)

αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεπώς «1–1».

Οπότε η (3) γράφεται : $x^3 + \dfrac{3\cdot x^2}{2} - 1 = 0 \Rightarrow 2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 - 2 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $\varphi(x) = 2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 - 2$, με x $\in$ R.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο Εως πολυωνυμική με $\varphi'(x) = 6\cdot x^2 + 6\cdot x$, για κάθε x $\in$ R.

Λύνουμε την εξίσωση : φ′(x) = 0 $\Rightarrow$ 6·x·(x + 1) = 0 $\Leftrightarrow$ x = 0 ή x = −1

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	−	0	+	
$\varphi(x)$		↗		↘		↗	

- Η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1]$ Άρα :
  $\varphi(\Delta_1) = (\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x), \varphi(-1)] = (-\infty, -1]$,αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\cdot x^3 = -\infty$
  Επειδή $0 \notin \varphi(\Delta_1)$ η εξίσωση φ(x) = 0, είναι αδύνατη.

- Η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [-1, 0]$
  Άρα $\varphi(\Delta_2) = [\varphi(0), \varphi(-1)] = [-2, -1]$
  Επειδή $0 \notin \varphi(\Delta_2)$ η εξίσωση φ(x) = 0, είναι αδύνατη

- Η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_3 = [0, +\infty)$
  Άρα :
  $\varphi(\Delta_3) = [\varphi(0), \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)) = [-2, +\infty)$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\cdot x^2 = +\infty$.
  Επειδή το $0 \in \varphi(\Delta_3)$, (αφού η φ γνησίως αύξουσα στο Δ_3) η εξίσωση φ(x) = 0, έχει μοναδική ρίζα ρ $\in$ (0 +∞).

Γ3). Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot dt + f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \varepsilon\varphi x$, με x $\in$ [0, π/4]

Επειδή η f είναι συνεχής στο R, η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\cdot dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R.

Οπότε είναι και συνεχής στο [0, π/4].

Επιμέλεια σημειώσεων : Πολυχρονιάδης Νικόλαος

Άρα η συνάρτηση $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot dt$ είναι συνεχής στο [0, π/4] ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

• Η φ είναι συνεχής στο [0, π/4] ως άθροισμα γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων,

• φ(0) = $\int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot dt = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\cdot dt < 0$, αφού ισχύει f(t) > 0, για κάθε x ∈ [−π/4, 0]

Οπότε : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\cdot dt > 0 \Rightarrow -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\cdot dt < 0$.

φ(π/4) = f(0)·εφ(π/4) = 1 > 0 Άρα ισχύει φ(0) φ(π/4) < 0.
Από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον x_0 ∈ (−π/4, 0) για τον οποίο ισχύει :

φ(x_0) = 0 $\Rightarrow \int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot dt + f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \varepsilon\varphi x_0 = 0 \Rightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\cdot dt = f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \varepsilon\varphi x_0$.

β τρόπος : Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται :

$$\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot dt + f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \varepsilon\varphi x = 0 \Rightarrow \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot dt + f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x\cdot \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot dt + \eta\mu x\cdot f\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \left[\eta\mu x\cdot \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot dt\right]' = 0 \quad (4)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $h(x) = \eta\mu x\cdot \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot dt$, x ∈ [0, π/4].

Η h είναι συνεχής στο [0, π/4] και η h είναι παραγωγίσιμη στο (0, π/4).
Είναι : h(0) = 0 και h(π/4) = 0, δηλαδή h(0) = h(π/4). .
Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 ∈ (0, π/4) για τον οποίο ισχύει :
f ′(x) = 0, άρα ισχύει η σχέση (4)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f : (0, +∞) → R μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν :

- Η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞).
- f (1) = 1.
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση g(x) = $\int_{\alpha}^{x}\dfrac{f(t)-1}{t-1}\cdot dt$, x ∈ (1, +∞) και α > 1.

Να αποδείξετε ότι :

Δ1). f ′(1) = 0 (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 = 1 (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2). η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο R

$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)\cdot du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)\cdot du$ (μονάδες 6)

Μονάδες 9

Δ3). η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση (α – 1)·$\int_{\alpha}^{x}\dfrac{f(t)-1}{t-1}\cdot dt$ = (f(α) – 1)·(x – α) , x > 1 έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

Δ1). Είναι : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5\cdot h)-f(1-h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(1+5\cdot h)-f(1)}{h}-\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}\right]$.

Με αντικατάσταση x = 1 + 5·h ⇒ h = $\dfrac{x-1}{5}$ και x → 1 όταν h → 0 παίρνουμε :

Ισχύει : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(1+5\cdot h)-f(1)}{h} = 5\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ = 5·f ′(1).

Με αντικατάσταση t = 1 – h ⇒ h = 1 – t και t → 1 όταν h → 0 παίρνουμε :

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h} = -\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}$ = f ′(1).

Οπότε από την (1) προκύπτει :

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5\cdot h)-f(1-h)}{h}$ = 0 ⇒ 6·f ′(1) = 0 ⇒ f ′(1) = 0 (2)

Για 0 < x < 1, είναι : f ′(x) < f ′(1) ⇒ f ′(x) = 0,
και για x > 1, είναι : f ′(x) > f ′(1) ⇒ f ′(x) > 0, εφόσον η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞).
Έτσι προκύπτει ο πίνακας :

x	0	+∞
f ′(x)	–	+
f(x)	↗	↘
	Ο.Ε.	

Οπότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x = 1 το f(1) = 1.

Δ2). Η g είναι παραγωγίσιμη στο (1, +∞) ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ με

$g'(x) = \dfrac{f(x)-1}{x-1}$

Ισχύει : $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 1 \Rightarrow f(x) - 1 > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$.
Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $h(x) = \int_{x}^{x+1} g(t)\cdot dt$, $x \in (1, +\infty)$.

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = g(x + 1) - g(x) > 0$, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.
Η ανίσωση γράφεται : $h(8\cdot x^2 + 5) > h(2\cdot x^4 + 5) \Rightarrow 8\cdot x^2 + 5 > 2\cdot x^4 + 5 \Rightarrow 2\cdot x^2\cdot(4 - x^2) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (-2, 0)\cup(0, 2)$.

Δ3). Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$g''(x) = \left(\frac{f(x)-1}{x-1}\right)' = \frac{f'(x)(x-1) - (f(x)-1)}{(x-1)^2}.$$

$$g''(x) = \frac{1}{x-1}\cdot\left[f'(x) - \left(\frac{f(x)-1}{x-1}\right)\right] \qquad (3)$$

Η f είναι συνεχής στο $[1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$ ενώ η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}.$$

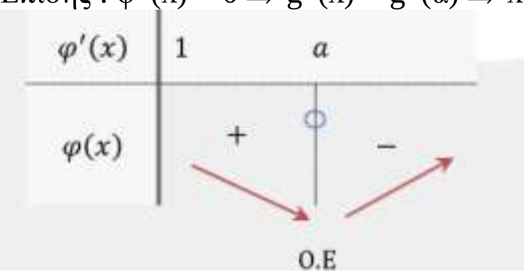
Επειδή $1 < \xi < x$ είναι : $f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0$.
Οπότε από τη σχέση (3) προκύπτει ότι :

$$g''(x) = \frac{1}{x-1}\cdot\left[f'(x) - f'(\xi)\right] > 0.$$

Άρα η g είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$.
Η εξίσωση γράφεται : $(\alpha - 1)\cdot g'(x) - (f(\alpha) - 1)\cdot(x - \alpha) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0$, όπου
$\varphi(x) = (\alpha - 1)\cdot g(x) - (f(\alpha) - 1)\cdot(x - \alpha)$, με $x \in (1, +\infty)$.
Παρατηρούμε ότι: $\varphi(\alpha) = 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι μοναδική λύση.
Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με :
$\varphi'(x) = (\alpha - 1)\cdot g'(x) - (f(\alpha) - 1)$

$\varphi'(x) = (\alpha - 1)\cdot[g'(x) - \left(\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\right)]$, αφού $f(1) = 1$.

$\varphi'(x) = (\alpha - 1)\cdot(g'(x) - g'(\alpha))$.
Θέτουμε $\varphi'(x) = 0 \Rightarrow g'(x) = g'(\alpha) \Rightarrow x = \alpha$, γιατί g' γνησίως αύξουσα.
Επίσης : $\varphi'(x) > 0 \Rightarrow g'(x) > g'(\alpha) \Rightarrow x > \alpha$.



Άρα για κάθε $x > 1$ είναι: $\varphi(x) \geq \varphi(\alpha)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = \alpha$.
Άρα : $\varphi(x) > 0$, για κάθε $x > 1$, με $x \neq \alpha$ και συνεπώς η λύση $x = \alpha$ είναι μοναδική.

Επιμέλεια σημειώσεων : Πολυχρονιάδης Νικόλαος

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1). Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Μονάδες 7

Α2). Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat. Μονάδες 4

Α3). Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ; Μονάδες 4

Α4). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α). Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |-z|$.

β). Αν μια συνάρτηση f είναι 1–1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

γ). Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty$.

δ). Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει :
$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

ε). Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

Α1). Θεωρία, σελ.217 Σχολικό Βιβλίο (απόδειξη)

Α2). Θεωρία, σελ.260 Σχολικό Βιβλίο (διατύπωση θεωρήματος)

Α3). Θεωρία, σελ. 261 Σχολικό Βιβλίο (Κρίσιμα σημεία λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι μηδέν)

Α4). α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση
$2 \cdot x^2 - |w - 4 - 3 \cdot i| \cdot x = -2 \cdot |z|$, $x \in R$, έχει μια διπλή ρίζα, την x = 1.

Β1). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο Κ(4, 3) και ακτίνα $\rho_2 = 4$. Μονάδες 8

Β2). Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους. Μονάδες 5

Β3). Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος Β1 να αποδείξετε ότι :
$|z - w| \le 10$ και $|z + w| \le 10$. Μονάδες 6

Β4). Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει : $|2 \cdot z^2 - 3 \cdot z - 2 \cdot z \cdot \bar{z}| = 5$. Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

Β1).Αφού το x = 1 είναι διπλή ρίζα της δοθείσας εξίσωση θα έχουμε :

$\Delta = 0 \Rightarrow |w - 4 - 3 \cdot i| = 16 \cdot |z|$ (1)

$2 - |w - 4 - 3 \cdot i| = -2 \cdot |z| \Rightarrow |w - 4 - 3 \cdot i| = 2 + 2 \cdot |z|$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε :

$(2 + 2 \cdot |z|)^2 = 16 \cdot 16 \cdot |z| \Rightarrow |z|^2 - 2 \cdot |z| + 1 = (|z| - 1)^2 = 0 \Rightarrow |z| = 1$ και άρα η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος κέντρου Ο(0, 0) και ακτίνας $\rho_1 = 1$.

Η σχέση (1) δίνει $|w - 4 - 3 \cdot i| = 4$ και άρα η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος κέντρου Κ(4, 3) και ακτίνας $\rho_2 = 4$.

Β2). Αν $\kappa = \alpha + \beta\cdot i$ ($\alpha, \beta \in R$) ο μιγαδικός αριθμός που ανήκει ταυτόχρονα και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους θα έχουμε : $|\kappa| = 1$

$|\kappa - 4 - 3\cdot i| = 4 \Rightarrow |\kappa - 4 - 3\cdot i| = 16 \Rightarrow (\kappa - 4 - 3\cdot i)\cdot(\overline{\kappa} - 4 + 3\cdot i) = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \kappa\cdot\overline{\kappa} - 4\cdot\kappa + 3\cdot\overline{\kappa}\cdot i - 4\cdot\overline{\kappa} + 16 - 12\cdot i - 3\cdot\overline{\kappa}\cdot i + 12\cdot i + 9 = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 4\cdot\kappa - 4\cdot\overline{\kappa} + 3\cdot\kappa\cdot i + 9 = 0 \Rightarrow 10 - 4\cdot(\overline{\kappa} + \kappa) + 3\cdot\iota\cdot(\kappa - \overline{\kappa}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 - 8\cdot\alpha - 6\cdot\beta = 0 \Rightarrow 8\cdot\alpha + 6\cdot\beta = 10 \Rightarrow 4\cdot\alpha + 3\cdot\beta = 5 \Rightarrow \alpha = \frac{5-3\beta}{4}$.

$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow (5\cdot\beta - 3)^2 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{3}{5}$, $\alpha = \frac{4}{5}$.

και άρα ο μιγαδικός κ είναι μοναδικός και είναι ο $\kappa = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\cdot i$.

Β3). Έχουμε :

$||w| = |4 + 3\cdot i| \leq |w - 4 - 3\cdot i| = 4 \Rightarrow ||w| - 5| \leq 4 \Rightarrow |w| \leq 9$

$|z + w| \leq |z| + |w| \leq 1 + 9 = 10$.

$|z - w| \leq 2\cdot\rho_1 + 2\cdot\rho_2 = 10$ (ρ_1, ρ_2 αντίστοιχα οι ακτίνες των δύο παραπάνω κύκλων)

Β4). Έχουμε :

$|2\cdot z^2 - 3\cdot z - 2\cdot z\cdot\overline{z}| = 5 \Rightarrow |z|\cdot|2\cdot z - 3 - 2\cdot\overline{z}| = 5 \Rightarrow |2\cdot z - 3 - 2\cdot\overline{z}| = 1$

($z = \alpha + \beta\cdot i$, $\alpha, \beta \in R$)

$|4\cdot\beta\cdot i - 3| = 5 \Rightarrow 16\cdot\beta^2 + 9 = 25 \Rightarrow \beta = 1, \beta = -1$.

$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \alpha = 0$

Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί αριθμοί είναι : $z_1 = i$, $z_2 -i$.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$. για την οποία ισχύουν :

• $2\cdot x\cdot f(x) + x^2\cdot(f'(x) - 3) = -f'(x)$, για κάθε $x \in R$.

• $f(1) = \frac{1}{2}$.

Γ1). Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$, $x \in R$ και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R. Μονάδες 6

Γ2). Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1. Μονάδες 4

Γ3). Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση :
$f(5\cdot(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8\cdot(x^2 + 1)^2)$. Μονάδες 7

Γ4). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε :

$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)\cdot dt = -\xi\cdot(3\cdot\xi^2 - 1)\cdot f(\xi^3 - \xi)$. Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

Γ1). Έχουμε διαδοχικά : $2\cdot x/f(x) + x^2\cdot f(x) - 3\cdot x^2 = f(x) \Rightarrow 2\cdot x\cdot f(x) + x^2\cdot f'(x) + f'(x) = 3\cdot x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot x\cdot f(x) + (x^2 + 1)\cdot f'(x) = 3\cdot x^2 \Rightarrow ((x^2 + 1)\cdot f(x))' = (x^3)' \Rightarrow (x^2 + 1)\cdot f(x) = x^3 + c$

Για $x = 1 \Rightarrow 2\cdot f(1) = 1 + c \Rightarrow c = 0$.

$(x^2 + 1)\cdot f(x) = x^3 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$. $x \in R$.

Η f είαι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = \dfrac{3x^2}{\left(x^2+1\right)^2} > 0$, $x \in R$ και έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Γ2). Για τις ασύμπτωτες :
Δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \pm\infty$, για κάθε $x_0 \in R$.

Στο $+\infty$ έχουμε : $y = \lambda\cdot x + \beta$

$\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^3+x} = 1.$

$\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^2+1} = 0.$

Στο $-\infty$ έχουμε :

$\lambda = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^3+x} = 1.$

$\beta = \lim\limits_{x\to-\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{x^2+1} = 0.$

Άρα η f έχει ασύμπτωτη την $y = x$ στο $+\infty$ και $-\infty$.

Γ3). Η ανίσωση ,επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, θα γίνει διαδοχικά :
$f(5\cdot(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8\cdot(x^2 + 1)^2) \Rightarrow 5\cdot(x^2 +1)^3 - 8 \leq 8\cdot(x^2 +1)^2 \Rightarrow 5\cdot(x^2 + 1)^3 \leq 8\cdot((x^2 +1)^2 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{\left(x^2+1\right)^2+1} \leq \dfrac{8}{5} \Rightarrow f(x^2 + 1) \leq f(2) \Rightarrow x^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$

Γ4). Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = x\cdot \int_0^{x^3-x} f(t)\cdot dt$, $x \in [0, 1]$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle στο [0, 1]. Έχουμε :

Η g είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1] με $g'(x) = \int_0^{x^3-x} f(t)\cdot dt + x\cdot f(x^3 - x)\cdot(3\cdot x^2 - 1)$.

$g(0) = 0$, $g(1) = 0$

Άρα υπάρχει ,ένα τουλάχιστον, $\xi \in (0, 1)$: $g'(\xi) = 0 \Rightarrow \int_0^{\xi^3-\xi} f(t)\cdot dt = -\xi\cdot f(\xi^3 - \xi)\cdot(3\cdot\xi^2 - 1) = 0.$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν :

$\to f(x) = x + \int_1^x \left(\int_1^u \dfrac{\left(f'(t)\right)^2 - 1}{f(t)} \cdot dt \right) \cdot du$, για κάθε $x > 0$.

$\to f(x)\cdot f'(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$ και $f(0) = 0$ Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις :

$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, με x > 0 και $h(x) = (f'(x))^3$, με $x \ge 0$.

Δ1). Να αποδείξετε ότι : $f(x)\cdot f''(x) + 1 = (f'(x))^2$, για κάθε x > 0. Μονάδες 4

Δ2). α). Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f ′ στο $(0, +\infty)$.

β). Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$. Μονάδες 7

Δ3). Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι :

α). $g(x) \ge 2 - x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β). $\int_0^1 (2-x)\cdot f(x)\cdot dx < 1$. Μονάδες 6

Δ4). Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα x′x και τις ευθείες x = 0 και x = 1. Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

Δ1). Θέτουμε : $\int_1^u \frac{(f'(t))^2+1}{f(t)}\cdot dt$ = g(u) και η δοθείσα σχέση γίνεται : $f(x) = x + \int_1^x g(u)\cdot du$ (1)

Η συνάρτηση $\int_1^x g(u)\cdot du$ είναι παραγωγίσιμη αφού και η $\int_1^u \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}\cdot dt$ = h(u) είναι παραγωγίσιμη αφού η $\frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Παραγωγίζοντας την (1) για x > 0 έχουμε διαδοχικά :

$f'(x) = 1 + h(x)$

$f'(x) = 1 + \int_1^u \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}\cdot dt$

$f'(x) = \frac{(f'(x))^2-1}{f(x)} \Rightarrow f''(x)\cdot f(x) + 1 = (f'(x))$, x > 0.

Δ2). α). Αφού $f(x)\cdot f'(x) \ne 0$, x > 0 και η $f(x)\cdot f'(x)$ είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) σημαίνει ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο για x > 0.

f(1) = 1 > 0

f ′(1) = 1 > 0

$f(1)\cdot f'(1) = 1 > 0$

Άρα /$f(x)\cdot f'(x) > 0$, για κάθε x > 0, δηλαδή η f(x), f ′(x) έχουν το ίδιο πρόσημο και αφού f(1) = 1 > 0 , f ′(x) > 0 θα είναι αντίστοιχα f(x) > 0 , f ′(x) > 0, για x > 0.

β). Η σχέση του ερωτήματος Δ1 έχουμε (αφού και η f ′ είναι συνεχής) :

$\lim_{x\to 0^+} (f(x))^2 = (f'(0))^2 \Rightarrow (f'(0))^2 = \lim_{x\to 0^+} (f(x)\cdot f''(x) + 1) = f(0)\cdot f''(0) + 1 = 1$ και άρα

$(f'(0))^2 = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$ ή $f'(0) = -1$ αφού όμως f ′(x) > 0, x > 0 θα είναι f ′(0) = 1.

Δ3). α). Θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο Α(1, g(1)). Είναι $g(1) = \frac{f(1)}{f(1)}$ = 1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = \dfrac{f''(x)f(x) - \left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)}$, $x > 0$ με $g'(1) = -1$ (αφού $f''(1) = 0$) και έτσι η εφαπτομένη είναι $y - 1 = g'(1)\cdot(x - 1)$. Επειδή η g είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ θα έχουμε : $g(x) \geq -x + 2$, $x \in (0, +\infty)$.

β). Από την προηγούμενη σχέση θα έχουμε : $g(x) \geq -x + 2 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} \geq 2 - x \Rightarrow f'(x) \geq (2 - x)\cdot f(x)$, αφού $f(x) > 0$ και άρα θα έχουμε $\int_0^1 f'(x)\cdot dx > \int_0^1 (2-x)\cdot f(x)\cdot dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(1) - f(0) > \int_0^1 (2-x)\cdot f(x)\cdot dx \Rightarrow \int_0^1 (2-x)\cdot f(x)\cdot dx < 1$$

Δ4). Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι διαδοχικά και με την χρήση του ερωτήματος Δ1.

$$E(\Omega) = \int_0^1 \left|\left(f'(x)\right)^3\right|\cdot dx = \int_0^1 \left(f'(x)\right)^3\cdot dx = \int_0^1 f'(x)\cdot\left(f'(x)\right)^2\cdot dx =$$

$$= \left[f'(x)\cdot\left(f'(x)\right)^2\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)\cdot\left[\left(f'(x)\right)^2\right]'\cdot dx =$$

$$= \left[f'(x)\cdot\left(f'(x)\right)^2\right]_0^1 - 2\cdot\int_0^1 f(x)\cdot f'(x)\cdot f''(x)\cdot dx =$$

$$= 1 - \int_0^1 \left(1 - \left(f'(x)\right)^2\right)\cdot f'(x)\cdot dx = 1 - \int_0^1 f'(x)\cdot dx + 2\cdot\int_0^1 \left(f'(x)\right)^3\cdot dx =$$

$= 1 - \left(f(1) - f(0)\right) + 2\cdot E(\Omega)$. Άρα $E(\Omega) = 2\cdot E(\Omega) - 1 \Rightarrow E(\Omega) = 1$ τ. μ.